利用二階線性遞迴數列來探討河內塔問題及 n 連環

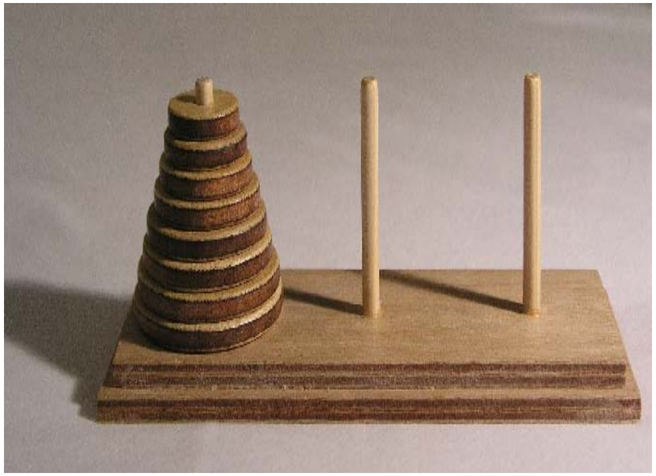


圖 1：河內塔問題

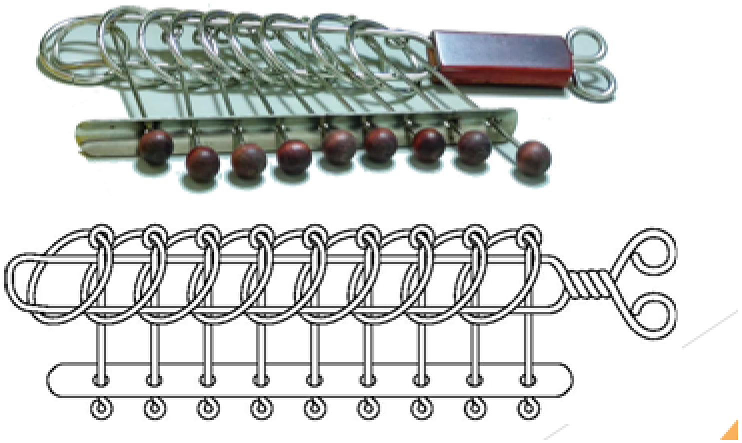


圖 2：九連環

高101班　鄭詠駿 黃品崴 吳欣霓 卓煒珊

指導老師　林鳳美老師

研究目的

1. 利用二階齊次線性遞迴數列來探討河內塔問題。
2. 利用二階非齊次線性遞迴數列來探討 n 連環的解法。
3. 由河內塔問題的遞迴數列推導 n 連環的解法。

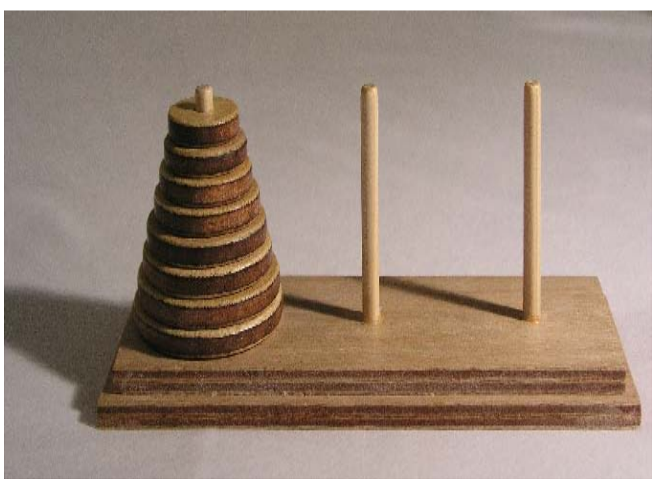


圖 1：河內塔問題

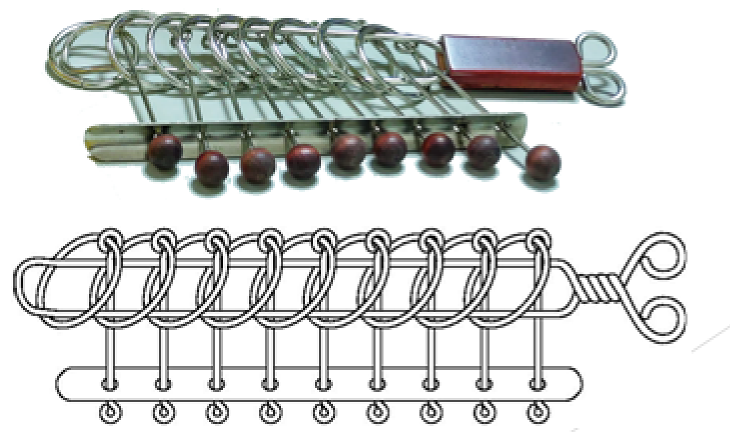


圖2：九連環

遞迴數列

數列給定一個(或數個)初始值，若其一般項可用前一項(或前數項)表示，則稱此數列為**遞迴數列**。

＊等差數列的遞迴關係

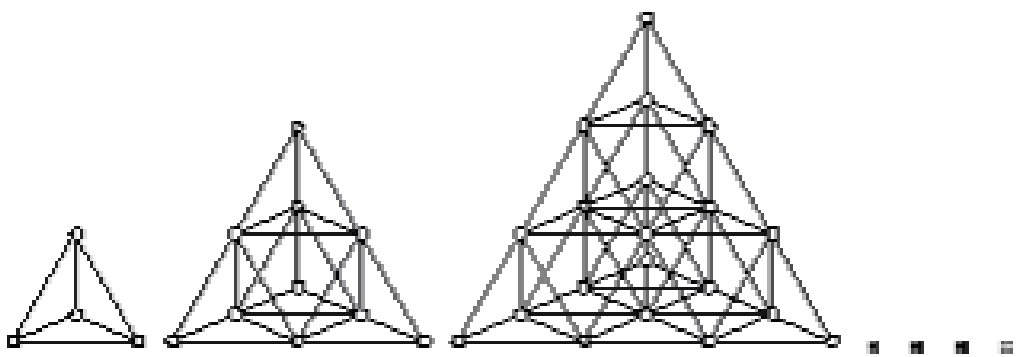
$$a_n - a_{n-1} = d \Rightarrow a_n = a_{n-1} + d$$

＊等比數列的遞迴關係

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = r \Rightarrow a_n = r a_{n-1}$$

遞迴關係 (Recurrence Relation) 來計數

- 生活中，我們時常會碰到與**自然數**有關的問題，它們往往會隱含**固定的規律**，但是當個數增加時，似乎有種『**無窮**』的感覺



圖E_1 圖E_2 圖E_3

遞迴關係(Recurrence Relations)

建構遞迴關係

- 切割平面
- 圓切平面
- 雪花曲線
- 爬樓梯

數學遊戲談遞迴關係

- 河內塔
- 大象轉彎
- 九連環

解遞迴關係

- 依據題設條件構造一個遞迴數列
- 建立相鄰幾項之間的遞迴關係式
- 解遞迴關係式(求一般式)

k 階實係數齊次線性遞迴數列

定義1. (k 階實係數齊次線性遞迴數列)

給定一數列 $\{a_n\}$, 若存在k 個實數：$c_1, c_2, \ldots, c_k$ 且$c_k \neq 0$ 滿足兩條件

(i) **初始條件**： $a_i = \gamma_i$ 其中$-(k-1) \le i \le 0$ 且$\gamma_i \in R$。

(ii)**遞迴關係**：

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + c_3 a_{n-3} + \cdots + c_k a_{n-k},\ n \ge 2$$

則稱數列$\{a_n\}$ 為k **階實係數齊次線性遞迴數列**。

$(i) a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} - a_{n-3}$ <u>三階實係數齊次線性遞迴數列</u>

$(ii) a_n = a_{n-1} + 5\sqrt{a_{n-2}} - a_{n-3}$ <u>三階實係數齊次非線性遞迴數列</u>

$(iii) a_n = a_{n-1} + 5a_{n-2} - a_{n-3} + 1$

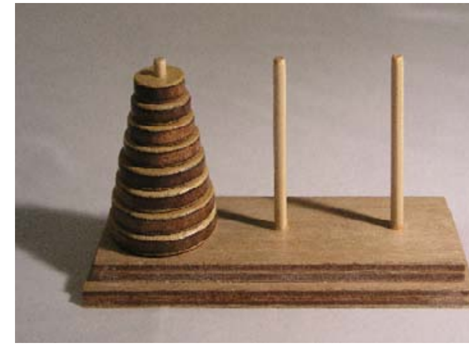
<u>三階實係數非齊次線性遞迴數列</u>

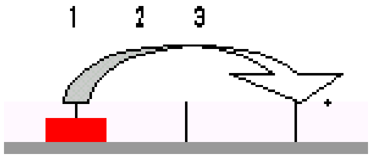
河內塔問題-印度神話

直到有一天，僧侶們能將64片的金屬片依規則從指定的木釘上全部移動至另一根木釘上，那麼，世界末日即隨之來到，世間的一切終將被毀滅，萬物都將至極樂世界。

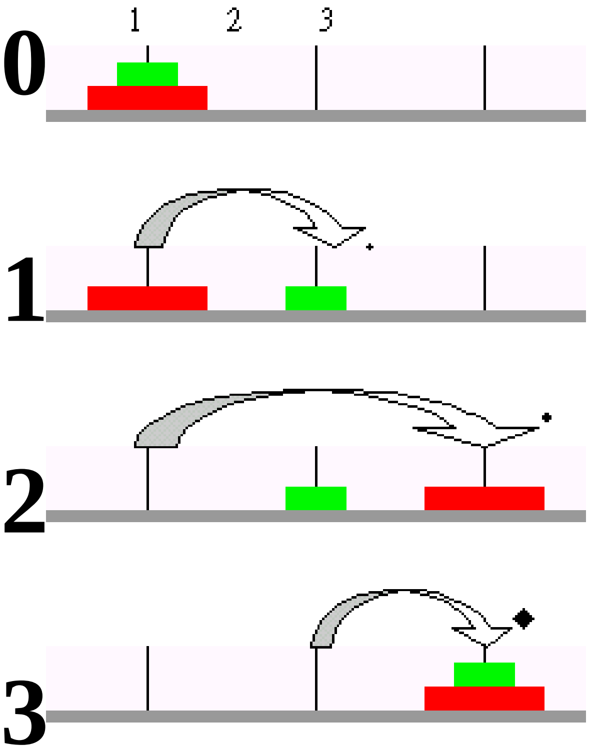
- 河內塔是由三根柱子，和*n*個不同直徑的圓盤所組成，它的遊戲方法是，將這*n*個圓盤由其一個柱子，全部搬至另一個柱子上，它的遊戲規則如下：
  - 在搬動的過程中，**大圓盤一定要在小圓盤下面。**
  - 一次只能搬動一個圓盤，且**圓盤只能在這三個柱子之間移動，不得超出範圍。**

河內塔問題–印度神話





設a_n為搬動n個圓盤到另一柱所需最少移動次數



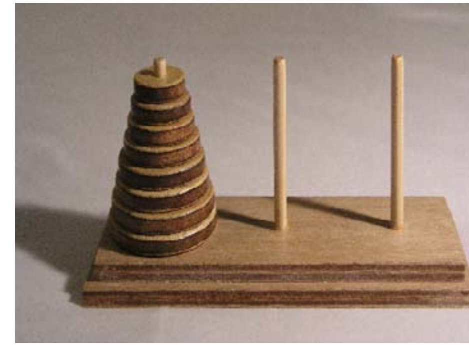
$$n=1,\quad a_1=1$$

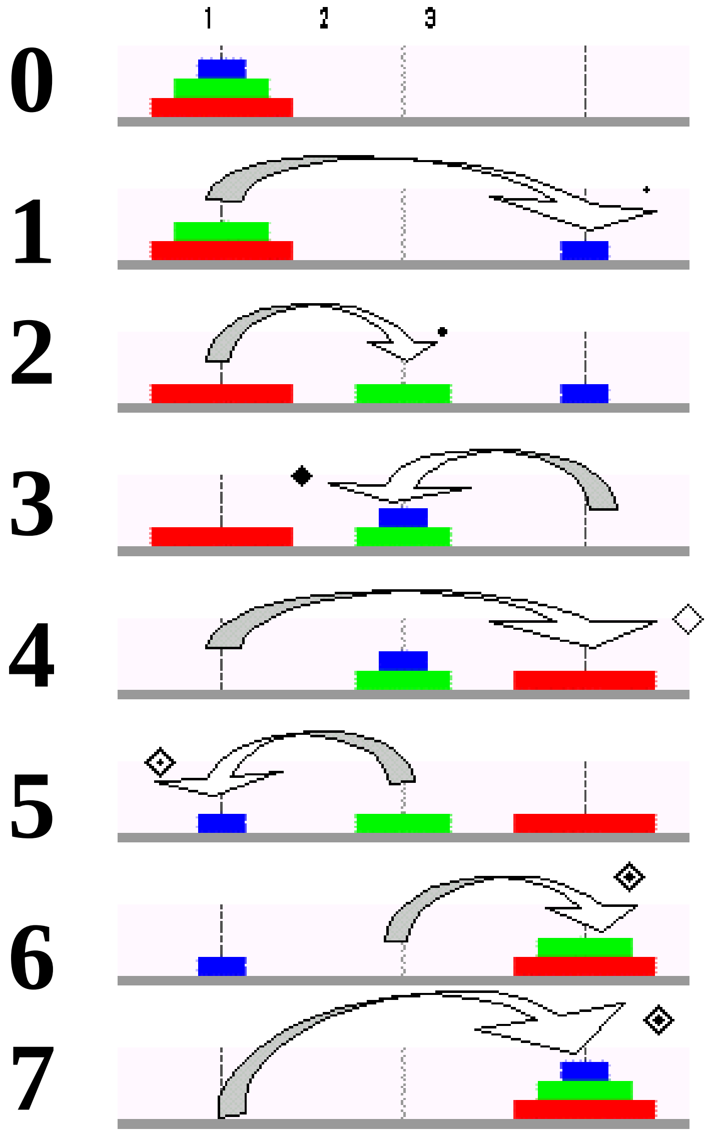
$$n=2,\quad a_2=1+1+1$$

$$=a_1+1+a_1$$

$$=3$$

河內塔問題-印度神話





設a_n為搬動n個圓盤到另一柱所需最少移動次數

$$n=1,\quad a_1=1$$

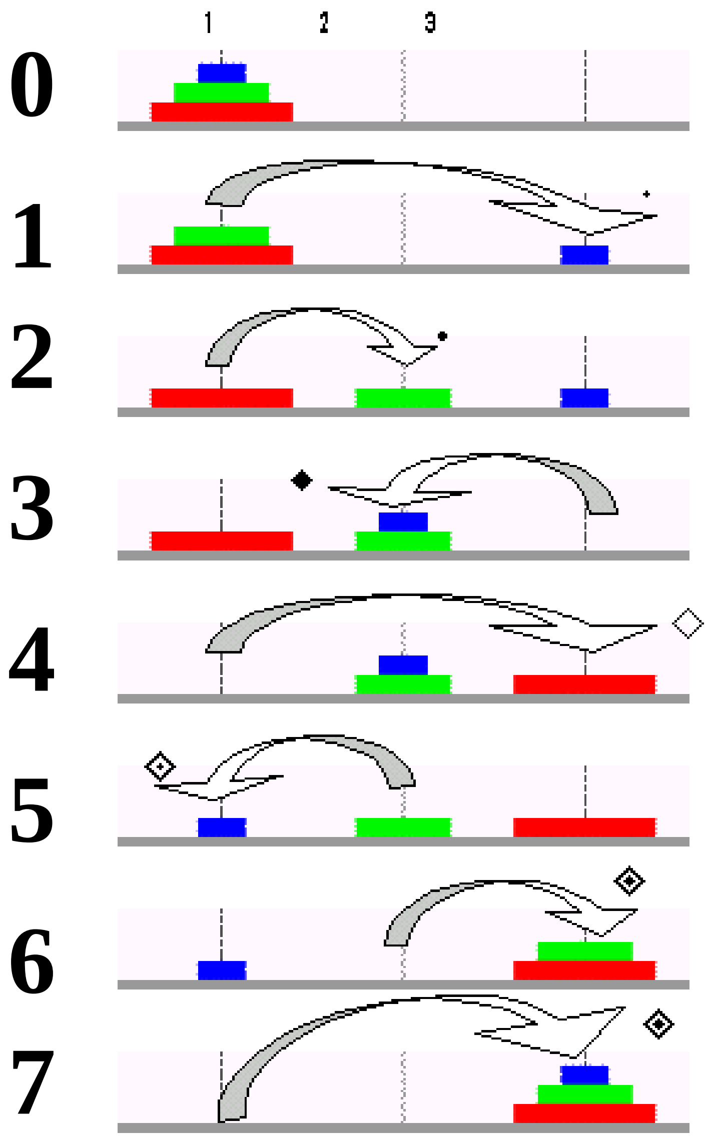
$$n=2,\quad a_2=a_1+1+a_1=3$$

$$n=3,\quad a_3=a_2+1+a_2=7$$

$$\vdots$$

$n=n$,移動?次

河內塔問題−印度神話



設a_n為搬動n個圓盤到另一柱所需最少移動次數

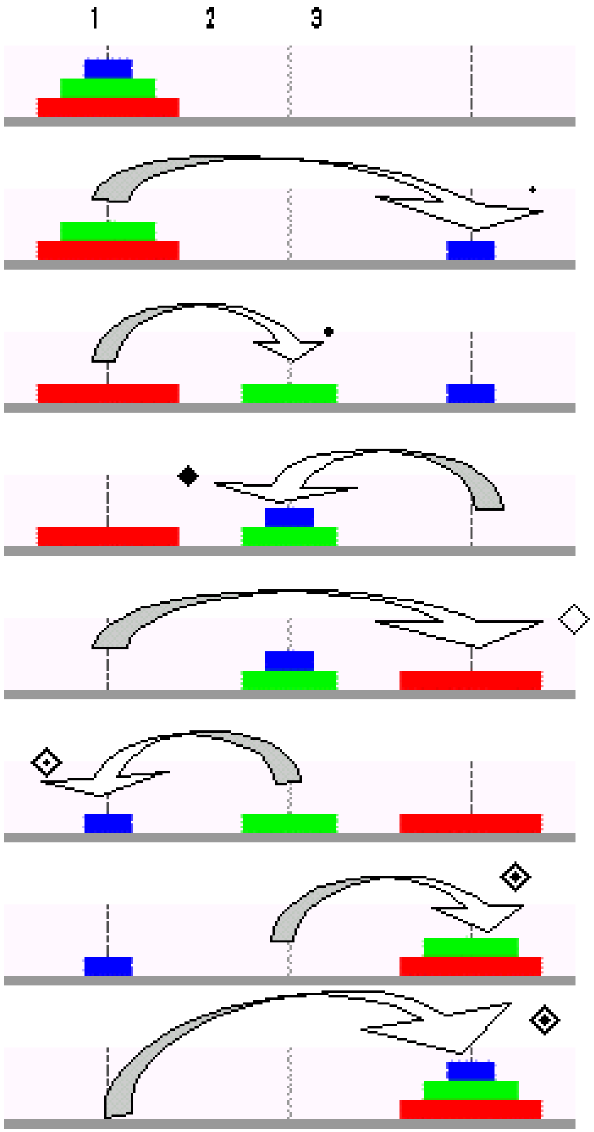
$$n=1,\quad a_1=1$$
$$n=2,\quad a_2=a_1+1+a_1=3$$
$$n=3,\quad a_3=a_2+1+a_2=7$$

$$\vdots$$

$$a_n=2a_{n-1}+1$$

河內塔問題－印度神話

0
1
2
3
4
5
6
7



設 a_n 為搬動 n 個圓盤到另一柱所需最少移動次數

$$n=1,\quad a_1=1=2^1-1$$
$$n=2,\quad a_2=3=2^2-1$$
$$n=3,\quad a_3=7=2^3-1$$
$$\vdots$$

$$a_n=2a_{n-1}+1=2^n-1$$

河內塔問題-印度神話

設 a_n 為搬動 n 個圓盤到另一柱所需最少移動次數

$$n=1,\quad a_1=1$$

$$n=2,\quad a_2=2a_1+1=2\cdot 1+1$$

$$n=3,\quad a_3=2a_2+1=2(2\cdot 1+1)+1=2^2+2+1$$

$$n=4,\quad a_4=2a_3+1=2(2^2+2+1)+1$$

等比級數和

$$=2^3+2^2+2+1$$

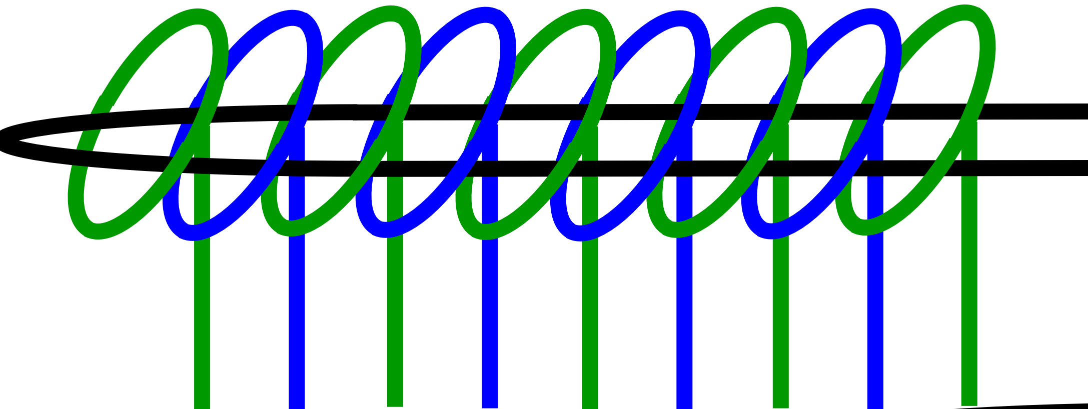
$$\vdots$$

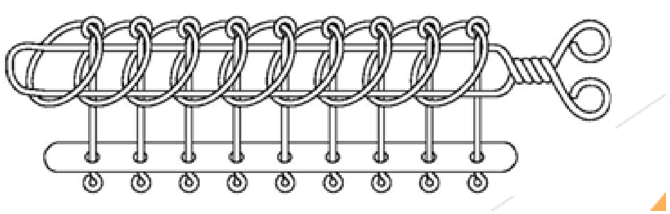
$$S_n=\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$$

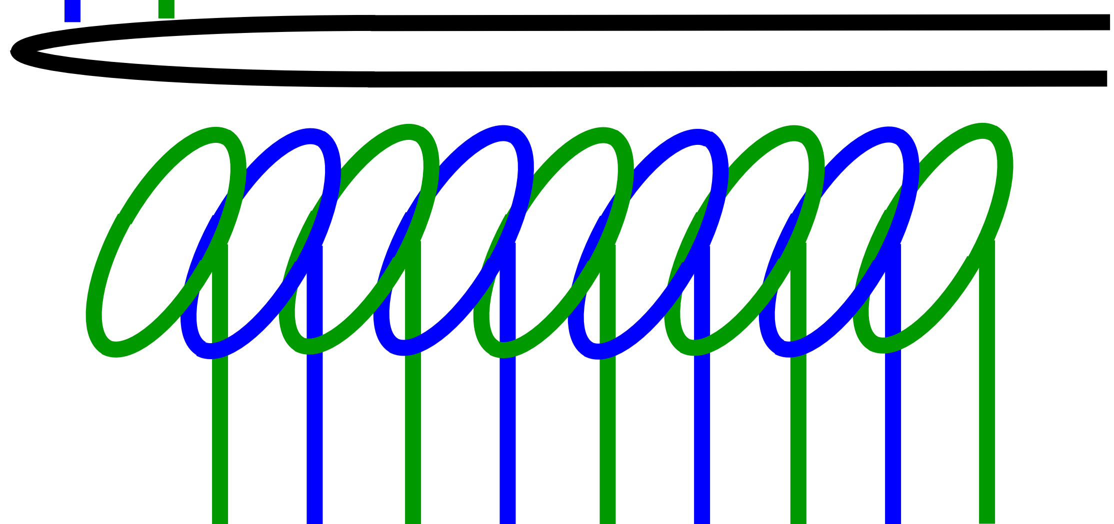
$$a_n=\underline{2^{n-1}+\cdots+2+1}=\frac{1\cdot(2^n-1)}{2-1}=2^n-1$$

九連環(Chinese Ring)⟶ n 連環

目的是要把九個金屬環逐一地從柄(劍)中脫下來，形成環與柄(劍)分離的狀態；或者從原先的分離狀態出發，恢復成一環扣一環的樣子。







九連環(Chinese Ring)

因可被當做不用鑰匙開啟的鎖

九連環既好玩又益智，它們有很深的數學原理，它的解法與**河內塔**類似，是數學上的遞迴數列。

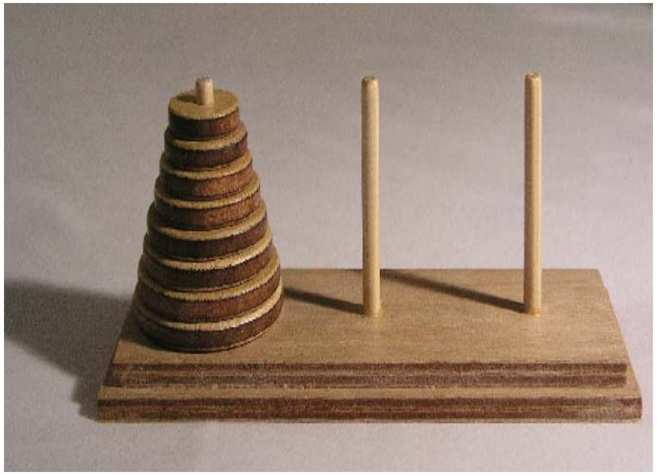
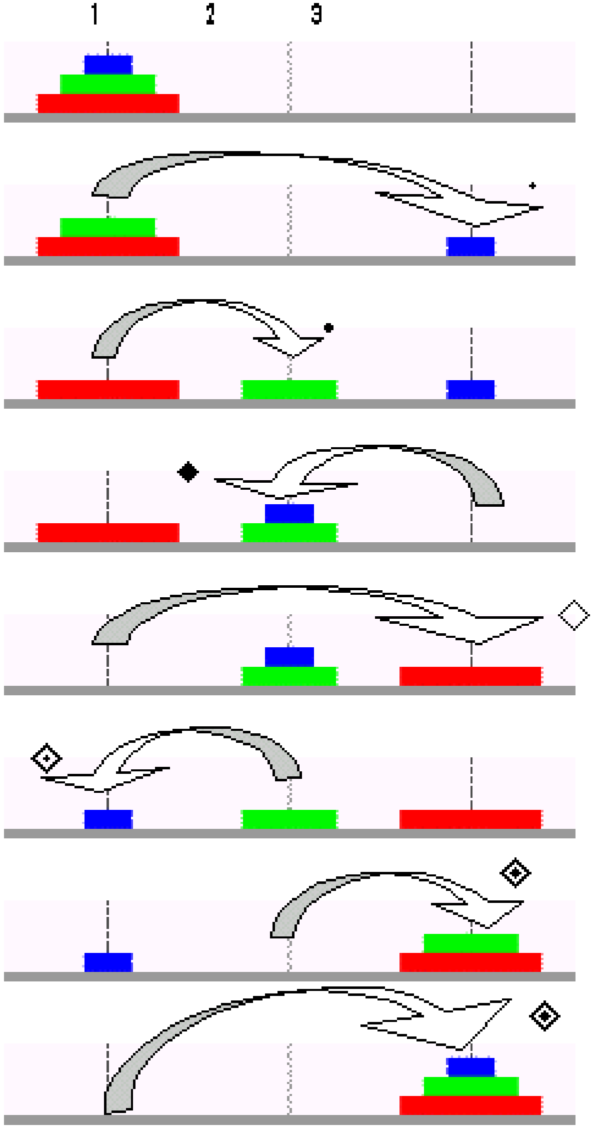


圖 2 ：河內塔問題

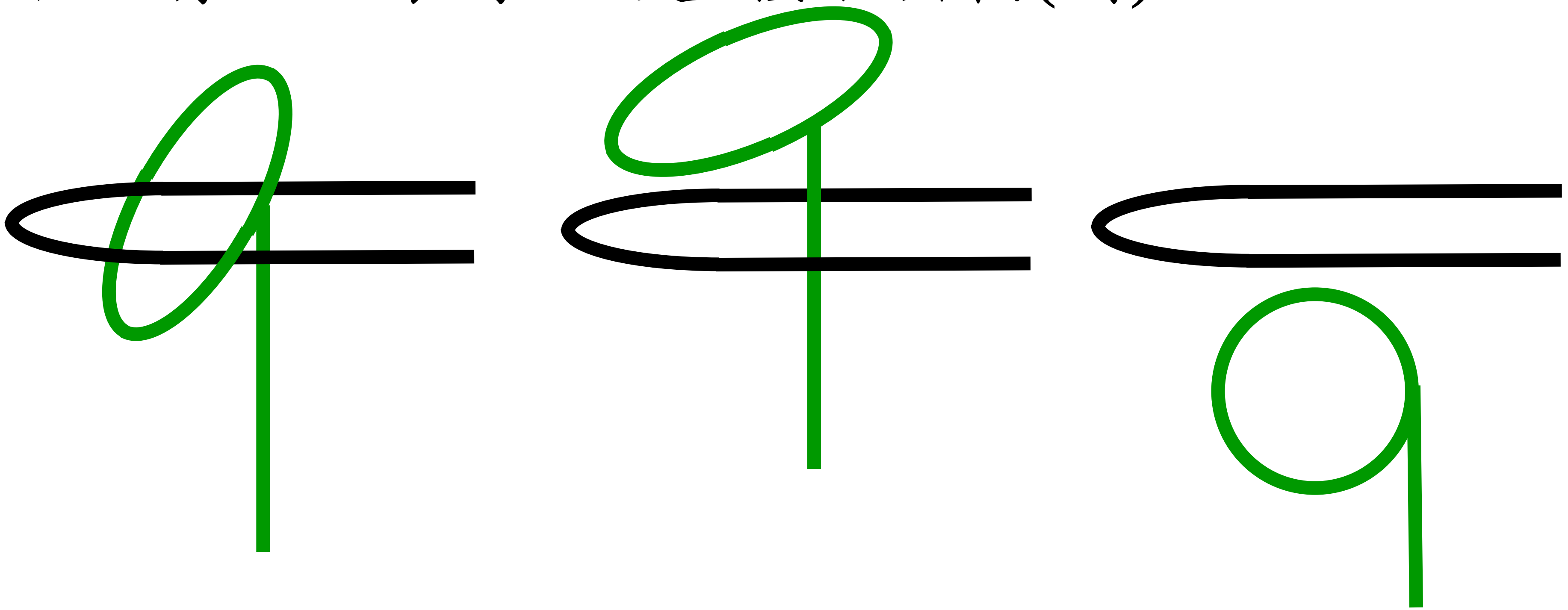


$n+2$ 連環(Chinese Ring)-一個環

探究解一連環至少需操作多少次?

每將一個環套入一次或套出一次，稱為操作一次。故一連環僅需操作1次。

若只有一個環時，可直接取出柄(劍)



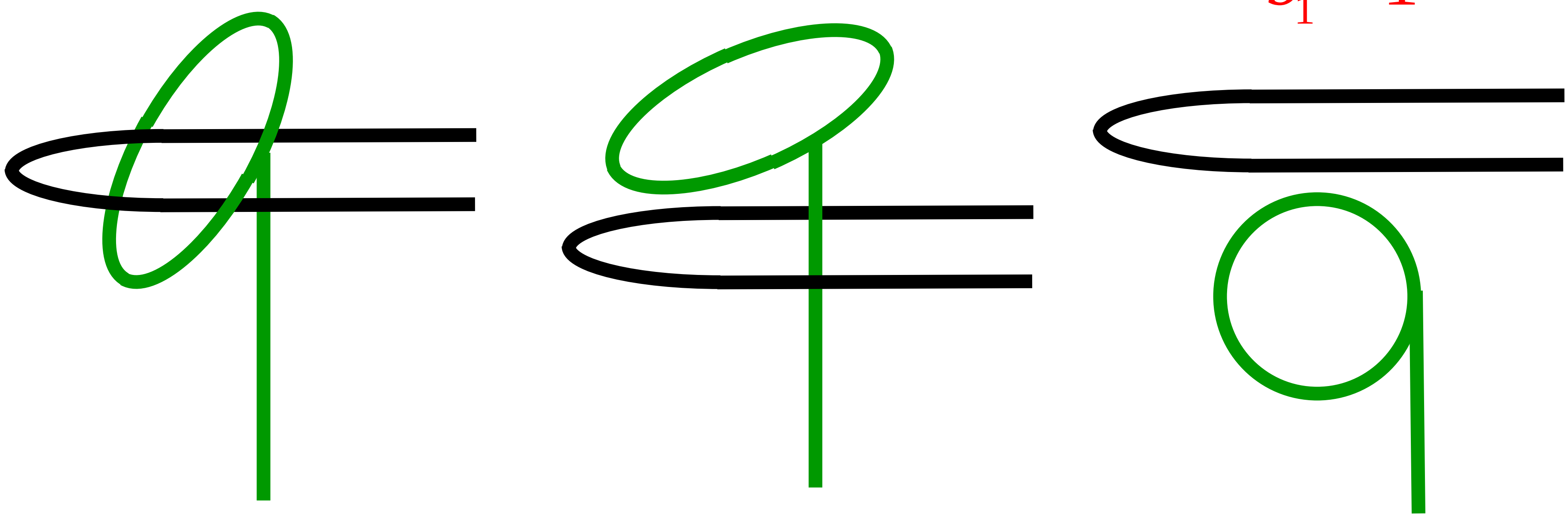
$n+2$ 連環(Chinese Ring)-一個環

探討解 $n+2$ 連環至少需操作多少次?

每將一個環套入一次或套出一次，稱為**操作一次**。故一連環僅需操作1次。

令解$n+2$連環至少操作需 b_{n+2} 次，所以

$b_1=1$

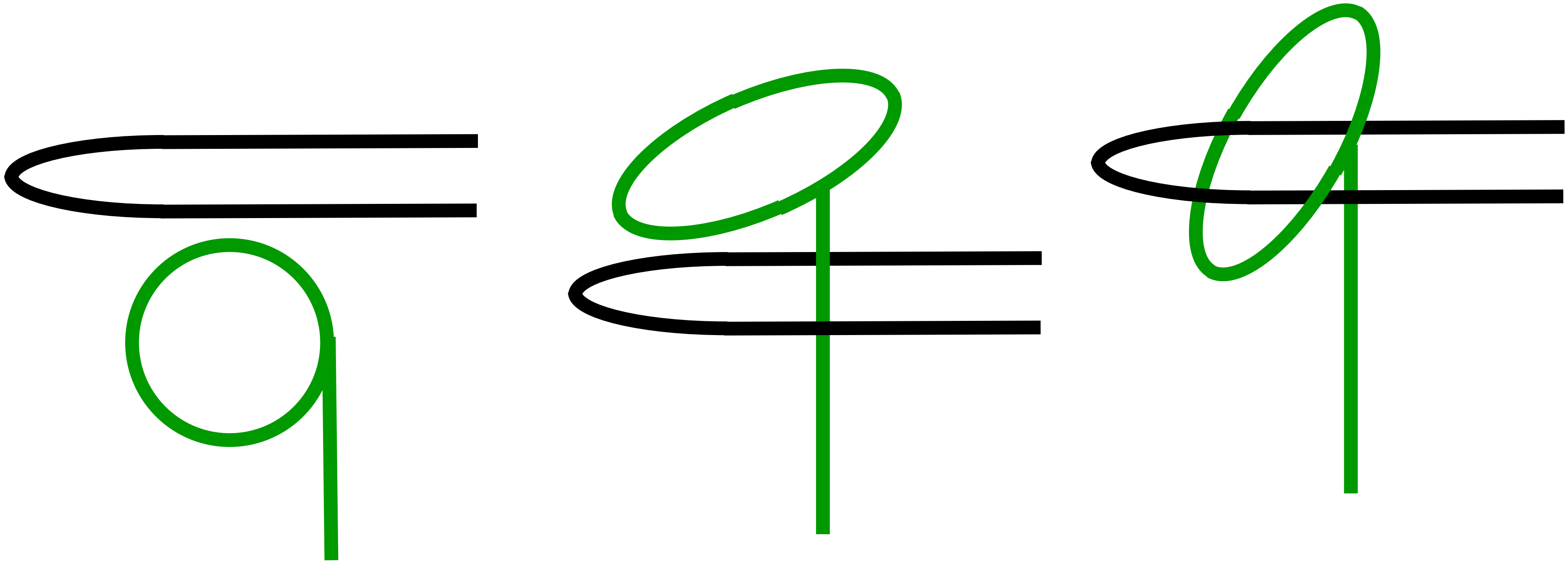


$n+2$ 連環(Chinese Ring)-一個環

令解 $n+2$ 連環至少操作需 b_{n+2} 次

只有一個環時，也可直接套入柄(劍)

$b_1 = 1$

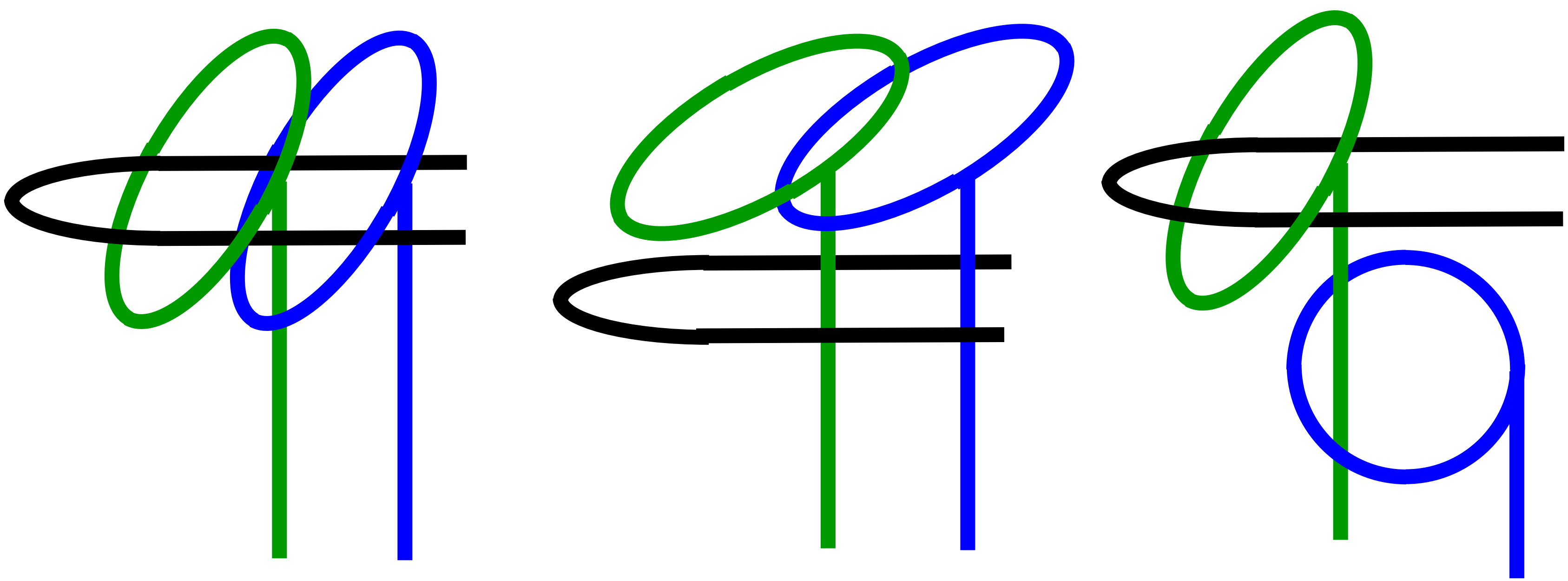


$n+2$ 連環(Chinese Ring)-二個環

令解$n+2$連環至少操作需 b_{n+2} 次

若是兩個環，必須先將靠內的環取出，再取出靠外的環，故

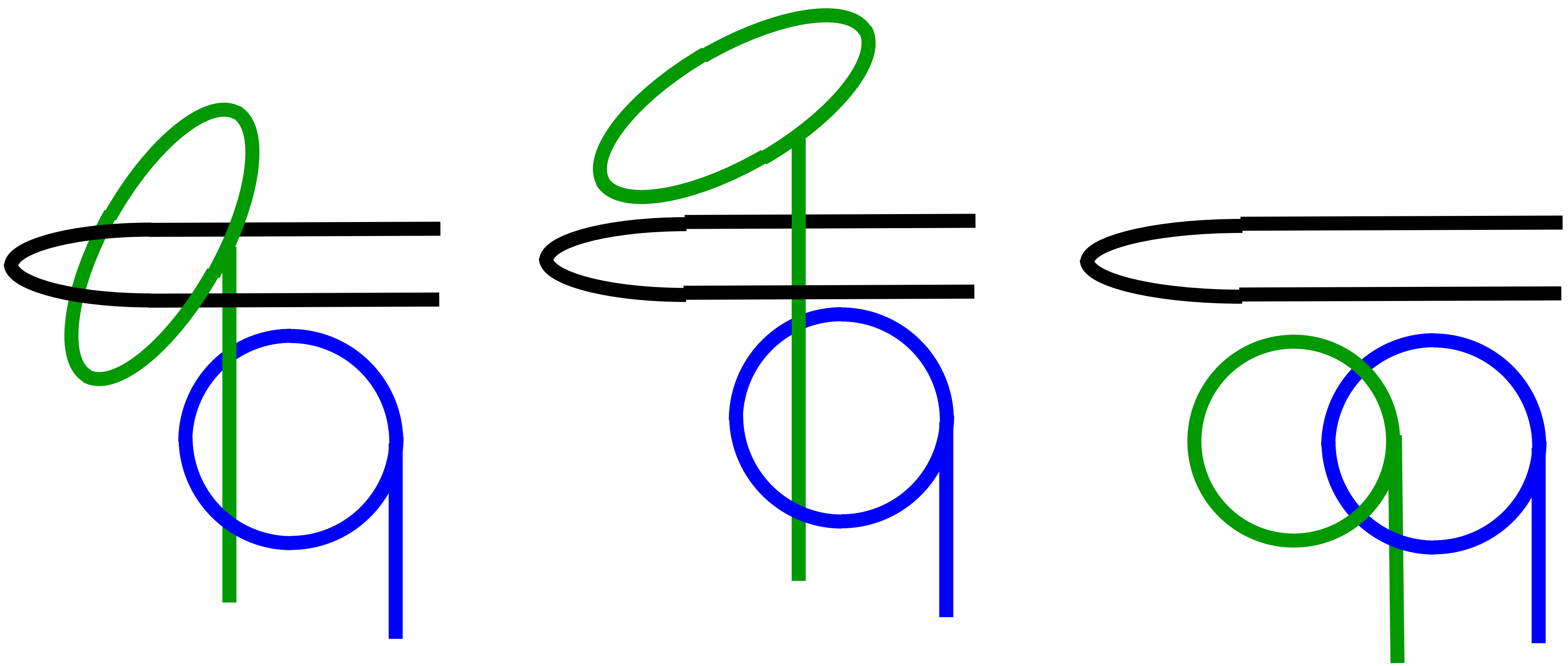
$$b_2 = 2$$



$n+2$ 連環(Chinese Ring)-二個環

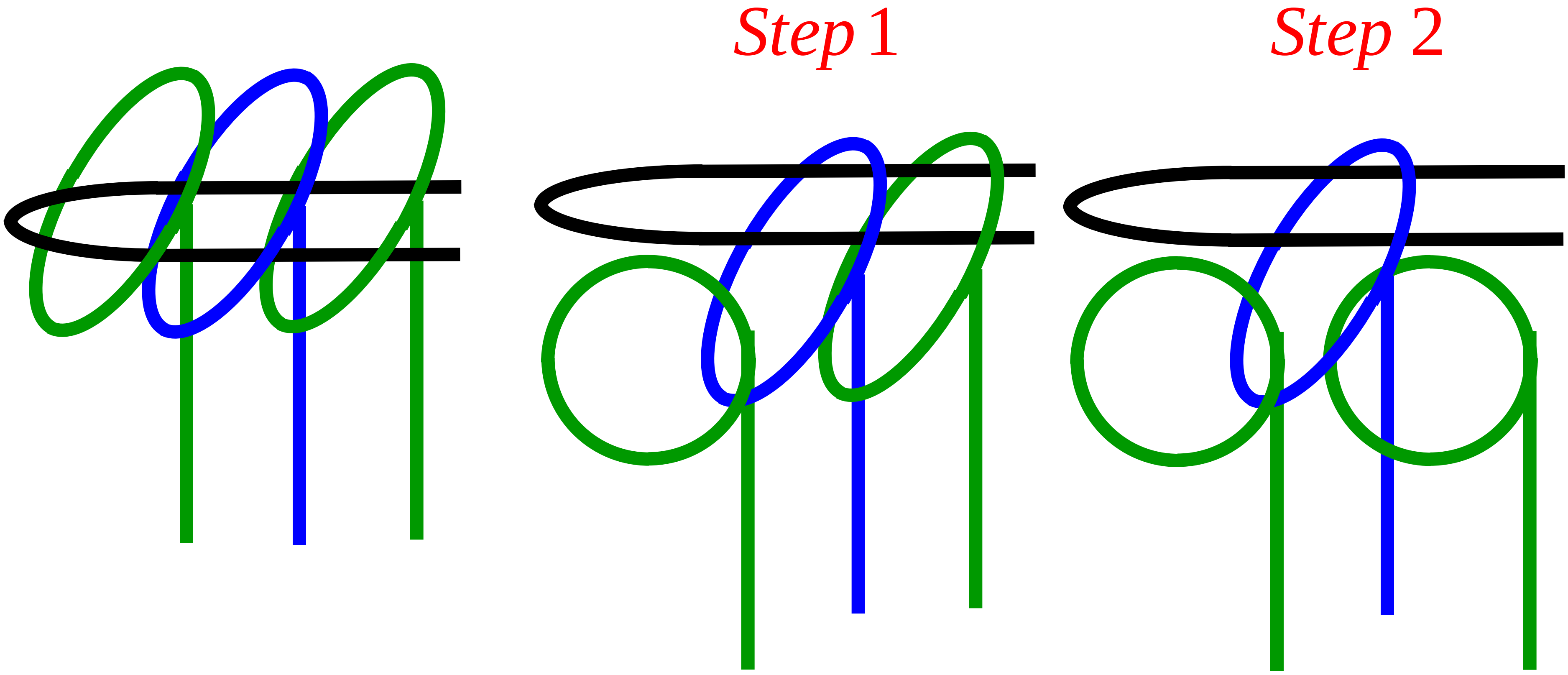
若是兩個環，必須先將靠內的環取出，再取出靠外的環，故

$$b_2 = b_1 + 1 = 2$$



$n+2$ 連環(Chinese Ring)-二個環

三連環的解法：



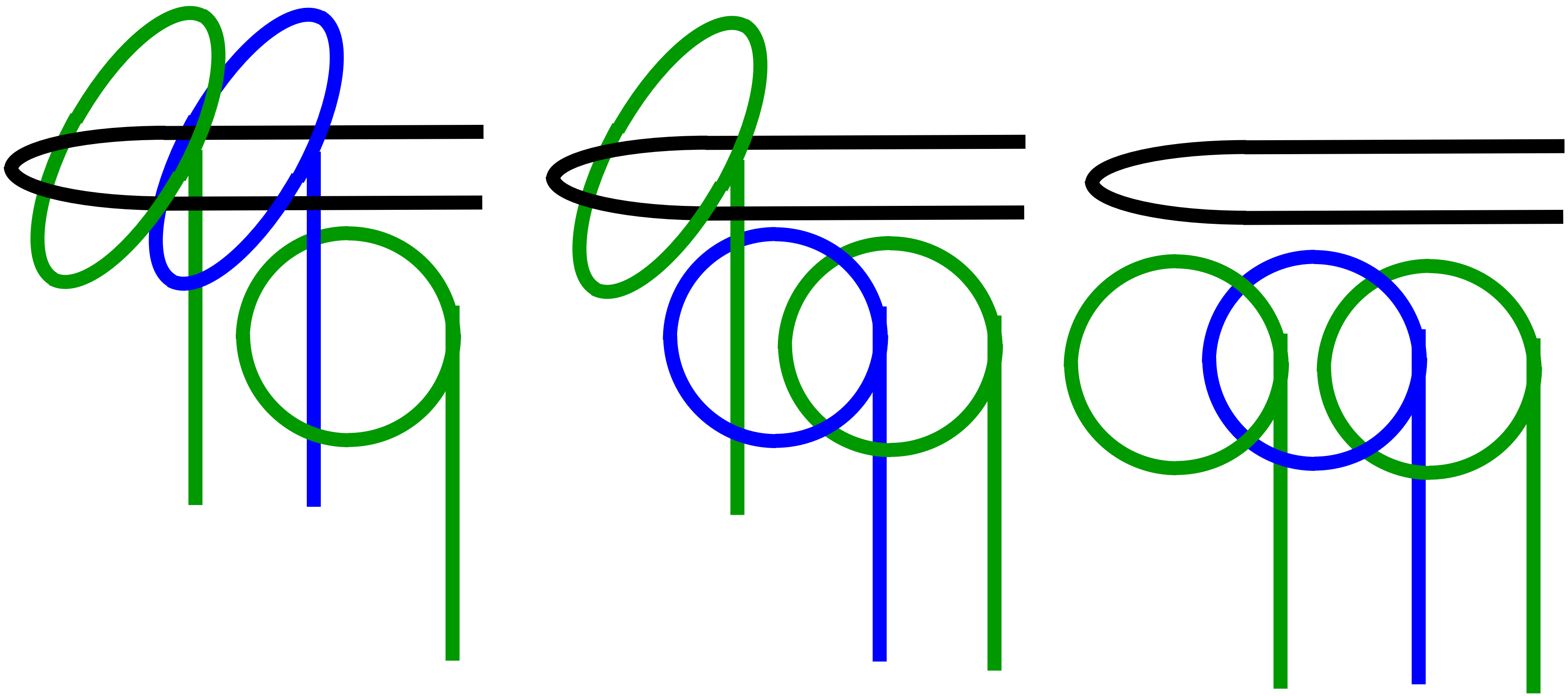
$n+2$ 連環(Chinese Ring)-三個環

三連環的解法

$$b_3 = b_1 + 1 + b_1 + b_2 = b_2 + 2b_1 + 1$$

Step 3

Step 4



$n+2$ 連環(Chinese Ring)

令解$n+2$連環至少操作需 b_{n+2} 次

則 $b_1 = 1$

$b_2 = 2$

當 $n=1$時， $b_3 = b_1 + 1 + b_1 + b_2 = b_2 + 2b_1 + 1$

同理類推知

當 $n=2$時， $b_4 = b_3 + 2b_2 + 1$

$\vdots$

因此， $b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n + 1$

二階整係數非齊次線性遞迴數列

$n+2$連環(Chinese Ring)

令解$n+2$連環至少操作需 b_{n+2} 次

則
$$\begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 2 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n + 1 \end{cases}$$

$Step\,1$：第 n 環從柄放下至少操作需 b_n 次

$Step\,2$：第$n+2$環從柄放下至少操作需 1 次

$Step\,3$： n 環放上柄 至少操作需 b_n 次

$Step\,4$：$n+1$ 環從柄放下至少操作需 b_{n+1} 次

$n+2$ 連環(Chinese Ring)

$$\begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 2 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n + 1 \end{cases}$$

【解】 可以寫成

$$b_{n+2} + b_{n+1} = 2\left(b_{n+1} + b_n\right) + 1 \qquad \textbf{(1)}$$

令 $c_n = b_{n+1} + b_n$

則 $c_{n+1} = 2c_n + 1$ 且 $c_1 = 3$ 得到 $c_n = 2^{n+1} - 1$

恰好是河內塔問題的遞迴關係
只差初期條件不同而已

$n+2$ 連環(Chinese Ring)

$$\begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 2 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n + 1 \end{cases}$$

$c_n = 2^{n+1} - 1$ 代入(1)式

$$b_{n+2} + b_{n+1} = 2^{n+2} - 1$$

又 $b_{n+2} - b_{n+1} = 2b_n + 1$ ，相加得到

$$b_{n+2} = b_n + 2^{n+1} \qquad (2)$$

$n+2$ 連環(Chinese Ring)

$$\begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 2 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n + 1 \end{cases}$$

$b_{n+2} = b_n + 2^{n+1}$，分成兩種情形討論

(i)當 $n = 2m$ 為偶數時，則

$$b_{2m+2} = b_{2m} + 2^{2m+1} = b_{2m-2} + 2^{2m-1} + 2^{2m+1}$$

$$= \cdots = b_2 + (2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2m+1})$$

$$b_{2m+2} = 2 + (2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2m+1}) = \frac{2}{3}\left(2^{2m+2} - 1\right)$$

故 $b_n = \frac{2}{3}\left(2^n - 1\right)$

$n+2$ 連環(Chinese Ring)

$$\begin{cases} b_1 = 1, b_2 = 2 \\ b_{n+2} = b_{n+1} + 2b_n + 1 \end{cases}$$

$b_{n+2} = b_n + 2^{n+1}$ ，分成兩種情形討論

(ii)當 $n = 2m+1$ 為奇數時，則

$$b_{2m+3} = b_{2m+1} + 2^{2m+2} = b_{2m-1} + 2^{2m} + 2^{2m+2}$$

$$= \cdots = b_1 + (2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2m+2})$$

$$b_{2m+3} = 1 + (2^2 + 2^4 + \cdots + 2^{2m+2}) = \frac{1}{3}\left(2^{2m+4} - 1\right)$$

故 $b_n = \frac{1}{3}\left(2^{n+1} - 1\right)$

參考文獻

[1] 林鳳美 (2019)。高階線性遞迴數列的一般化費氏螺線。**數學傳播**，**43**(4)，99-109。

[2]俞崇恩、張衛(2004)。**千變萬化的九連環**。台北市:九章出版社。

[3] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**，**33**(4)，47-62。

[4] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**，**34**(1)，35-57。

[5]郭君逸(2014)。九連環與格雷碼。**數學傳播**，**38**(3)，13-24。