多項式定理的幾何表現與推廣巴斯卡三角形之探討

關鍵詞：巴斯卡三角形、多項式定理、線性遞迴數列

陳暐潔、王芸若、楊承恩

具體成效

1.參賽校內科展榮獲優等

多項式定理的幾何表現與巴斯卡三角形推廣之探討

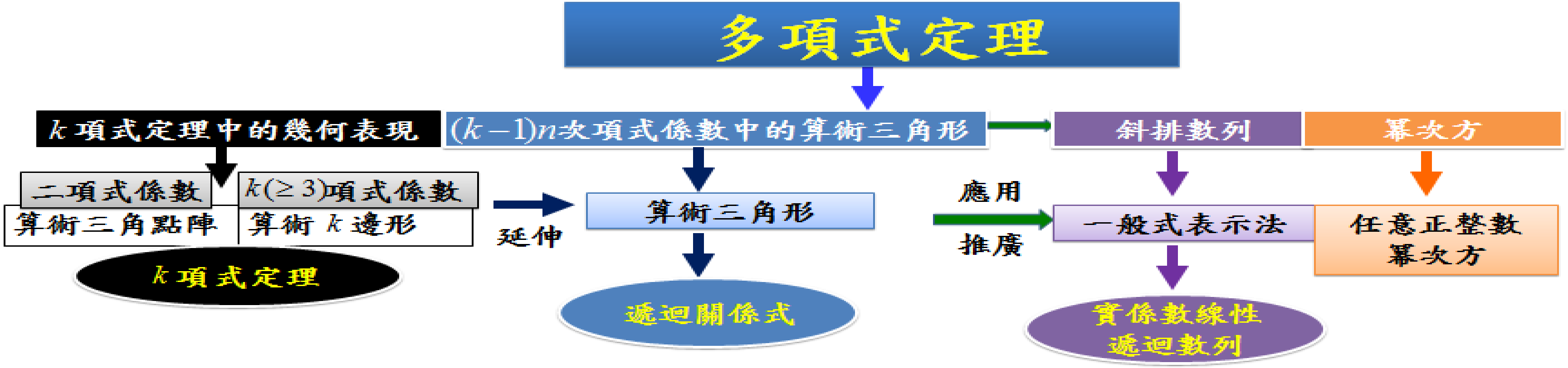
2.通過青培計畫初審

多項式定理的幾何表現與推廣巴斯卡三角形之探討與應用

3.參賽全國中小學小論文榮獲特優

建構多項式定理的幾何圖形及其性質之探討

研究目標



$$(x_1+x_2)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n x_1^{n-r}x_2^r$$

$$(x_1+x_2)^0=1$$
$$(x_1+x_2)^1=x_1+x_2$$
$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$
$$(x_1+x_2)^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$
$$(x_1+x_2)^4=x_1^4+4x_1^3x_2+6x_1^2x_2^2+4x_1x_2^3+x_2^4$$
$$(x_1+x_2)^5=x_1^5+5x_1^4x_2+10x_1^3x_2^2+10x_1^2x_2^3+5x_1x_2^4+x_2^5$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

巴斯卡三角形是算術三角形

研究方法-定義1及定義2

【定義1】(k項式定理)設$n_1, n_2, \cdots, n_k, n$為非負整數，且$x_1+x_2+\cdots+x_k$為k項式，則

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n}\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i} \qquad (1)$$

其中k項式係數

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!},\quad 0\le n_1,n_2,\cdots,n_k\le n$$

，

我們叫(1)式為k項式定理(Multinomial theorem)。

由巴斯卡定理：$C_r^n=C_{r-1}^{n-1}+C_r^{n-1}$可推廣為$k$項式係數定理：

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\cdots,n_k}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\cdots,n_k}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots,n_k-1}$$

研究方法-定義1及定義2

【定義2】

本研究將 k 項式 $x_1+x_2+\cdots+x_k$ 改為 $(k-1)n$ 次 k 項式 $\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\cdots+\alpha_0$，則

$$(\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\cdots+\alpha_0)^n=\sum_{r=0}^{(k-1)n}D_r^n x^{(k-1)n-r} \qquad (2)$$

其中 D_r^n, $0\le r\le (k-1)n$ 項係數在 $(k-1)n$ 次 k 項式的算術三角形中第 n 列第 r 行的元素

$x^{(k-1)n-r}$ 的係數

研究方法-定義1及定義2

算術三角形

$(\alpha_1 x+\alpha_0)^0$	第 0 列	1
$(\alpha_1 x+\alpha_0)^1$	第 1 列	$\alpha_1 \quad \alpha_0$
$(\alpha_1 x+\alpha_0)^2$	第 2 列	$D_0^2 \quad D_1^2 \quad D_2^2$
$(\alpha_1 x+\alpha_0)^3$	第 3 列	$D_0^3 \quad D_1^3 \quad D_2^3 \quad D_3^3$
$(\alpha_1 x+\alpha_0)^4$	第 4 列	$D_0^4 \quad D_1^4 \quad D_2^4 \quad D_3^4 \quad D_4^4$

$(\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0)^0$	第 0 列	1
$(\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0)^1$	第 1 列	$\alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0$
$(\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0)^2$	第 2 列	$D_0^2 \quad D_1^2 \quad D_2^2 \quad D_3^2 \quad D_4^2$
$(\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0)^3$	第 3 列	$D_0^3 \quad D_1^3 \quad D_2^3 \quad D_3^3 \quad D_4^3 \quad D_5^3 \quad D_6^3$
$(\alpha_2 x^2+\alpha_1 x+\alpha_0)^4$	第 4 列	$D_0^4 \quad D_1^4 \quad D_2^4 \quad D_3^4 \quad D_4^4 \quad D_5^4 \quad D_6^4 \quad D_7^4 \quad D_8^4$

$$(2x+3)^0 = 1$$
$$(2x+3)^1 = 2x+3$$
$$(2x+3)^1 = 4x^2+12x+9$$
$$(2x+3)^3 = 8x^3+36x^2+54x+27$$
$$(2x+3)^4 = 16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$$

第 0 列	1
第 1 列	2 3
第 2 列	4 12 9
第 3 列	8 36 54 27
第 4 列	16 96 216 216 81

研究方法-定義1及定義2

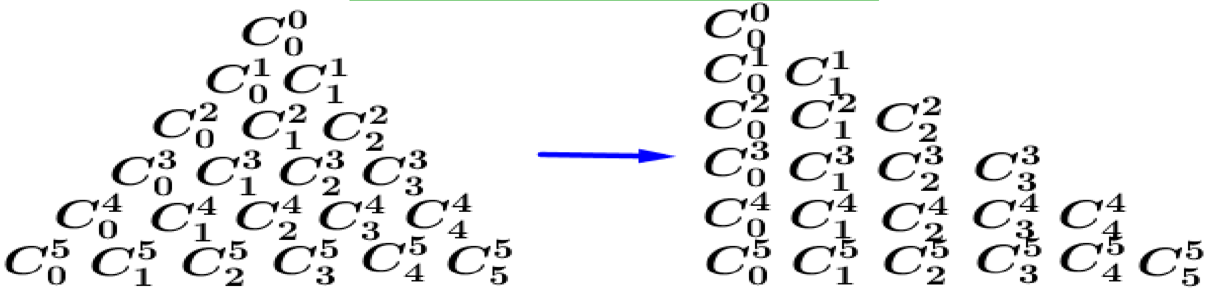
算術三角形

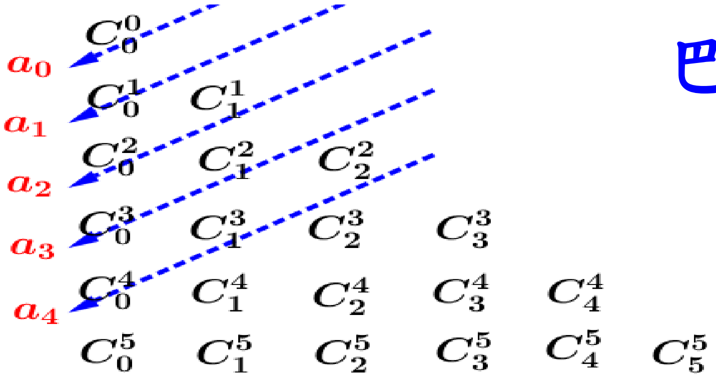
$(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^0$ 第 0 列	1
$(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^1$ 第 1 列	$\alpha_2\ \ \alpha_1\ \ \alpha_0$
$(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^2$ 第 2 列	$D_0^2\ \ D_1^2\ \ D_2^2\ \ D_3^2\ \ D_4^2$
$(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^3$ 第 3 列	$D_0^3\ \ D_1^3\ \ D_2^3\ \ D_3^3\ \ D_4^3\ \ D_5^3\ \ D_6^3$
$(\alpha_2x^2+\alpha_1x+\alpha_0)^4$ 第 4 列	$D_0^4\ \ D_1^4\ \ D_2^4\ \ D_3^4\ \ D_4^4\ \ D_5^4\ \ D_6^4\ \ D_7^4\ \ D_8^4$

$(2x^2+3x+4)^0$ 第 0 列	1
$(2x^2+3x+4)^1$ 第 1 列	2 3 4
$(2x^2+3x+4)^2$ 第 2 列	4 12 25 24 16
$(2x^2+3x+4)^3$ 第 3 列	8 36 102 171 204 144 64

研究方法-斜排數列

斜排數列





巴斯卡三角形中的斜排數列

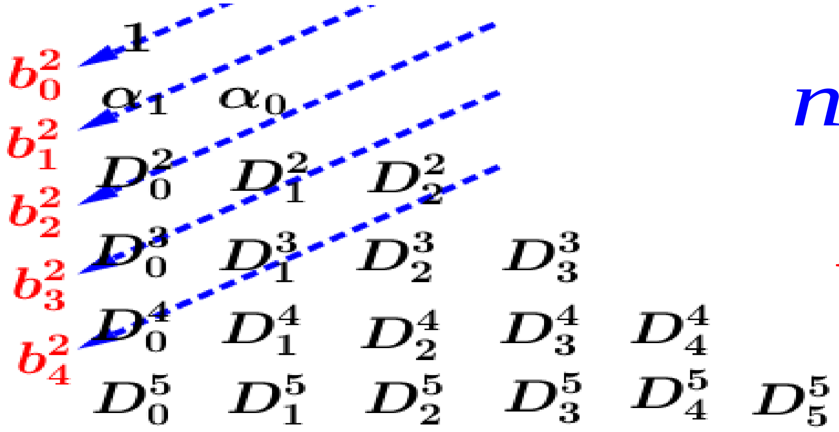
$$\{a_n\}: a_1, a_2, a_3, \cdots$$

費氏數列

研究方法-斜排數列

斜排數列

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \alpha_1 & & \alpha_0 & & & & \\
 & & & D_0^2 & & D_1^2 & & D_2^2 & & & \\
 & & D_0^3 & & D_1^3 & & D_2^3 & & D_3^3 & & \\
 & D_0^4 & & D_1^4 & & D_2^4 & & D_3^4 & & D_4^4 & \\
D_0^5 & & D_1^5 & & D_2^5 & & D_3^5 & & D_4^5 & & D_5^5
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
\alpha_1 & \alpha_0 & & & & \\
D_0^2 & D_1^2 & D_2^2 & & & \\
D_0^3 & D_1^3 & D_2^3 & D_3^3 & & \\
D_0^4 & D_1^4 & D_2^4 & D_3^4 & D_4^4 & \\
D_0^5 & D_1^5 & D_2^5 & D_3^5 & D_4^5 & D_5^5
\end{array}
$$



n 次二項式係數中的斜排數列

$\{b_n^2\}: b_1^2, b_2^2, b_3^2, L$

是甚麼數列呢?

研究結果－探討 k 項式定理中的算術 k 邊形

二項式定理： $(x_1+x_2)^n$

【性質1】

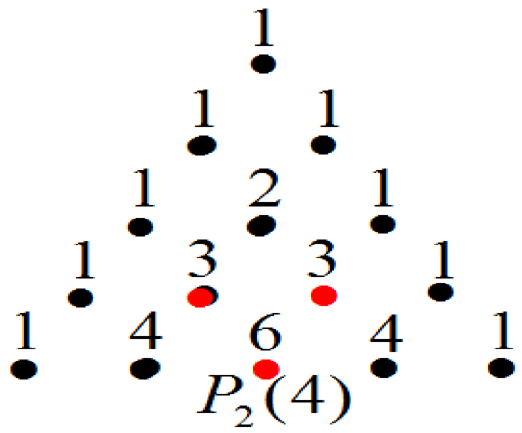
$(x_1+x_2)^0$ $\quad 1$

$(x_1+x_2)^1$ $\quad x_1+x_2$

$(x_1+x_2)^2$ $\quad x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$

$(x_1+x_2)^3$ $\quad x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3$

$(x_1+x_2)^4$ $\quad x_1^4+4x_1^3x_2+6x_1^2x_2^2+4x_1x_2^3+x_2^4$



巴斯卡定理: $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$

算術三角點陣

研究結果－建構 k 項式定理中的算術k邊形

由於 k 項式係數滿足分配律，即

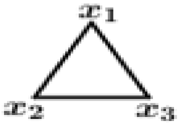
$$(x_1+\cdots+x_k)^2 = x_1(x_1+\cdots+x_k)+x_2(x_1+\cdots+x_k)+\cdots+x_k(x_1+\cdots+x_k)$$

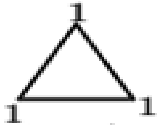
$$(x_1+\cdots+x_k)^3 = x_1(x_1+\cdots+x_k)^2+x_2(x_1+\cdots+x_k)^2+\cdots+x_k(x_1+\cdots+x_k)^2$$

$$\vdots$$

$$(x_1+\cdots+x_k)^n = x_1(x_1+\cdots+x_k)^{n-1}+x_2(x_1+\cdots+x_k)^{n-1}+\cdots+x_k(x_1+\cdots+x_k)^{n-1}$$

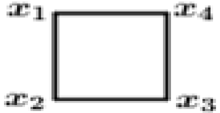
由分配律概念就可建構出算術 k 邊形

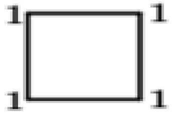




算術三角形

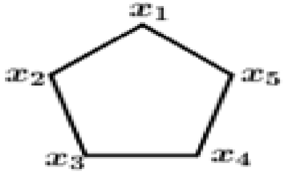
$P_3(1)$

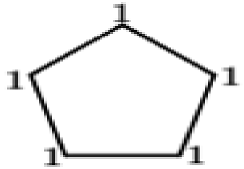




算術四邊形

$P_4(1)$





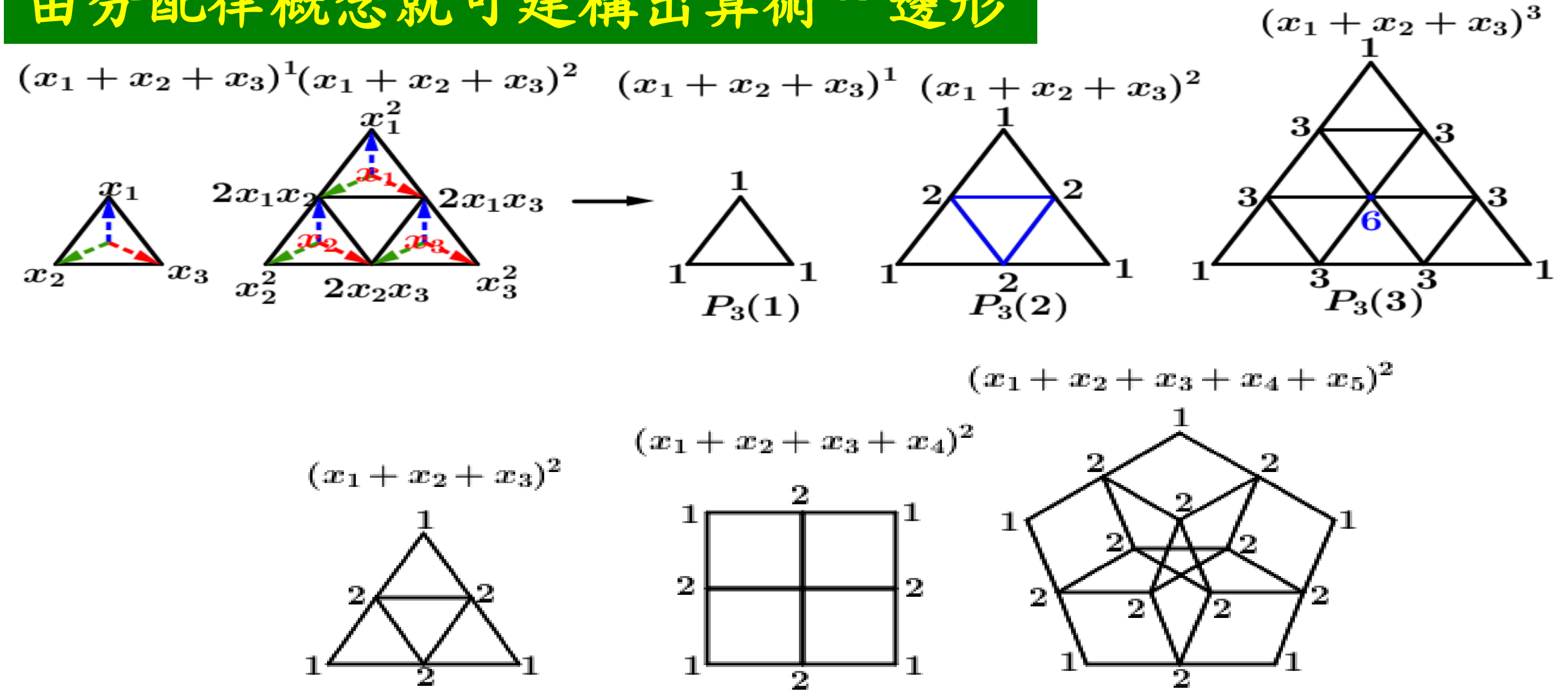
算術五邊形

$P_5(1)$

$(x_1+\cdots+x_k)^1 = x_1+\cdots+x_k$的幾何表現

研究結果-建構 k 項式定理中的算術k邊形

由分配律概念就可建構出算術 k 邊形



$P_3(2)$ $P_4(2)$ $P_5(2)$

算術三角形

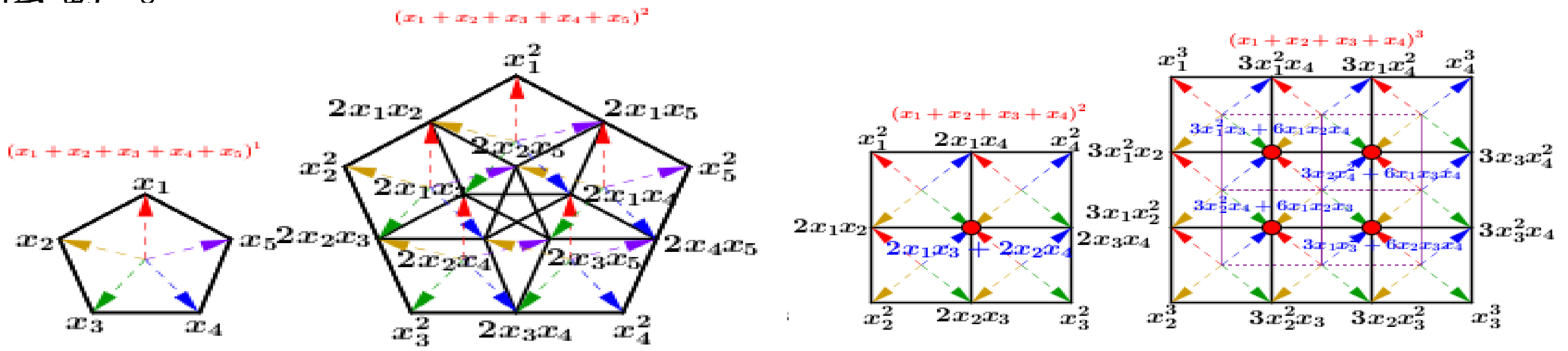
研究結果－探討算術k邊形的性質

算術 k 邊形性質

【性質 2】

(i)若 k 為**奇數**時，$P_k(n)$ 中每個頂點代表僅一項的係數。

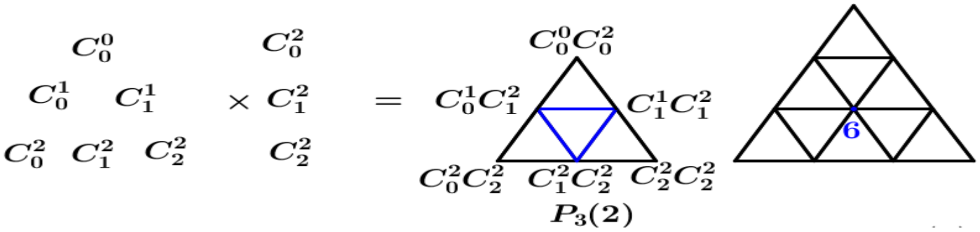
(ii)若 k 為**偶數**時，$P_k(n)$ 中至少有一個頂點代表二項以上的係數。



研究結果−探討算術k邊形的性質

【性質 3】算術k邊形每個頂點代表展開式的係數滿足k項式係數定理：

$$\binom{n}{n_1,n_2,\cdots,n_k}=\underbrace{\binom{n-1}{n_1-1,n_2,\cdots,n_k}+\binom{n-1}{n_1,n_2-1,\cdots,n_k}+\cdots+\binom{n-1}{n_1,n_2,\cdots,n_k-1}}_{k\text{ 個方向}}$$



$$C_0^1C_1^2+C_1^1C_1^2+C_1^2C_2^2$$
$$=C_1^2C_2^3=6$$

【定理 1】

$C_r^{n-r}C_{n-r}^{n}$ 第 $(k-1)n$ 列第 r 行的元素

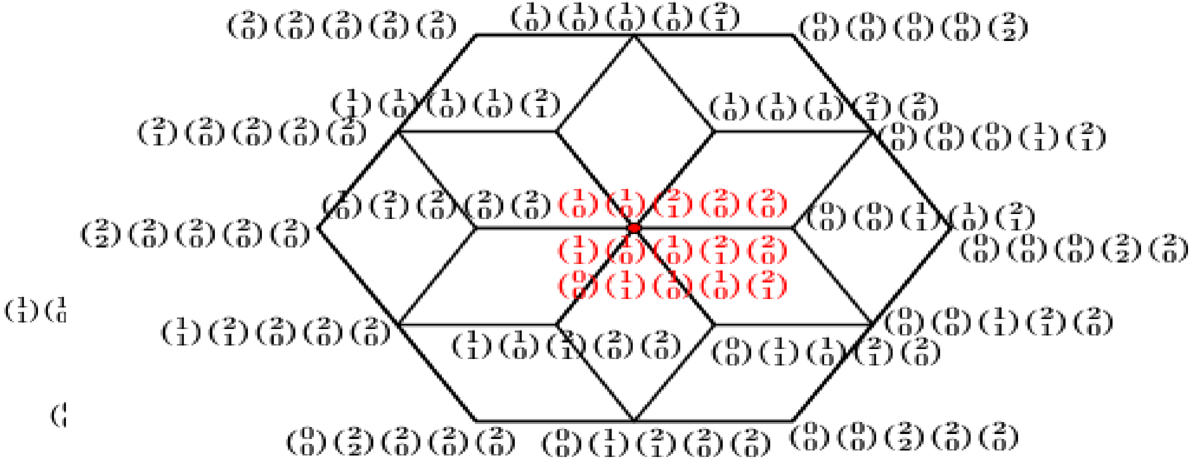
$$C_{r-1}^{n-r-1}C_r^{n-1}+C_r^{n-r-1}C_r^{n-1}+C_r^{n-r}C_{r+1}^{n-1}=C_r^{n-r}C_{r+1}^{n}$$

研究結果–探討算術k邊形的性質

【定理 2】

$$\binom{n}{n_1,n_2,n_3,\ldots,n_k}=\binom{n_1+n_2}{n_2}\binom{n_1+n_2+n_3}{n_3}\binom{n_1+n_2+n_3+n_4}{n_4}\cdots\binom{n}{n_k}$$

算術 k 邊形中每個頂點可用 $k-1$ 個巴斯卡係數的乘積表示。



$P_6(2)$

研究結果－算術k邊形的性質

k項式定理中k變數項性質探討【定理 3】

設$N_k(n,m)$為n次k項式定理展開式中的每個m變數項的項數，其中$1\le m\le k$，則

$N_k(n,m)$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$N_3(1,m)$	3	0	0	0	0
$N_3(2,m)$	3	3	0	0	0
$N_3(3,m)$	3	6	1	0	0
$N_3(4,m)$	3	9	3	0	0
$N_3(5,m)$	3	12	6	0	0
$N_4(1,m)$	4	0	0	0	0
$N_4(2,m)$	4	6	0	0	0
$N_4(3,m)$	4	8	3	0	0
$N_4(4,m)$	4	12	9	0	0
$N_4(5,m)$	4	16	18	0	0
$N_7(3,m)$	7	42	35	0	0
$N_7(4,m)$	7	63	105	35	0
$N_7(5,m)$	7	84	210	140	21

單變數項：x_1^3, x_2^3

二變數項：$x_1^2x_2, x_2^2x_3$

三變數項：$x_1x_2x_3$

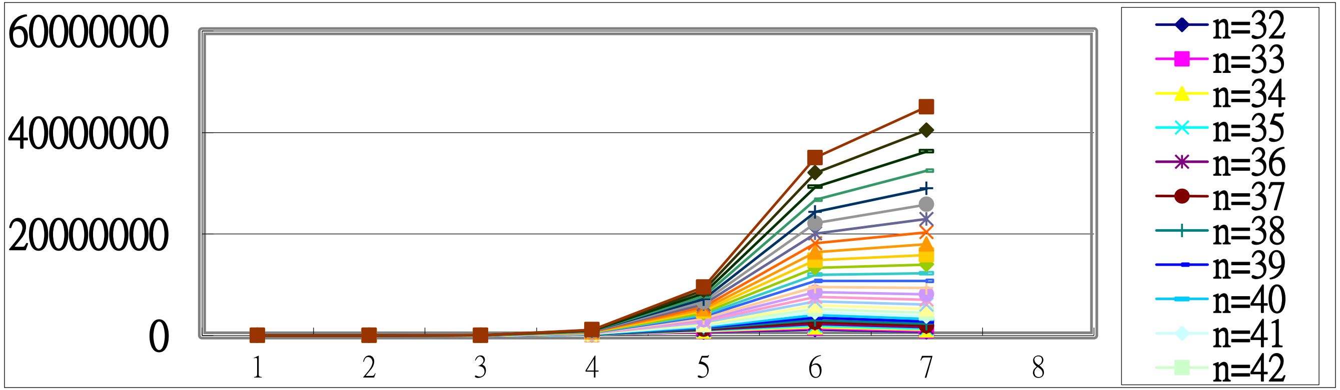
$$N_k(n,m)=\frac{1}{m}\left[C_1^{k-m+1}N_k(n-1,m-1)+C_1^{m}N_k(n-1,m)\right]$$

研究結果－算術 k 邊形的性質

k 項式定理中 k 變數項性質探討

設 $N_k(n,m)$ 為 n 次 k 項式定理展開式中的每個 m 變數項的項數，其中 $1 \le m \le k$，則

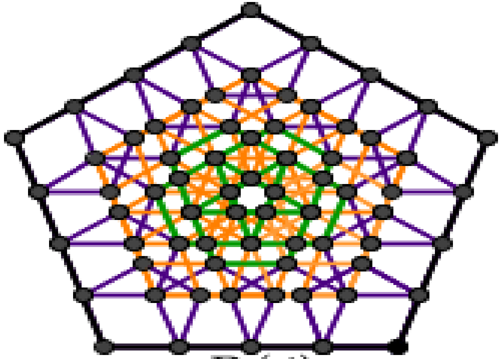
【定理 4】 $N_k(n,m) = C_m^k H_{n-m}^m$



當 $n \to \infty$ 時，$N_k(n,k)$ 值最大

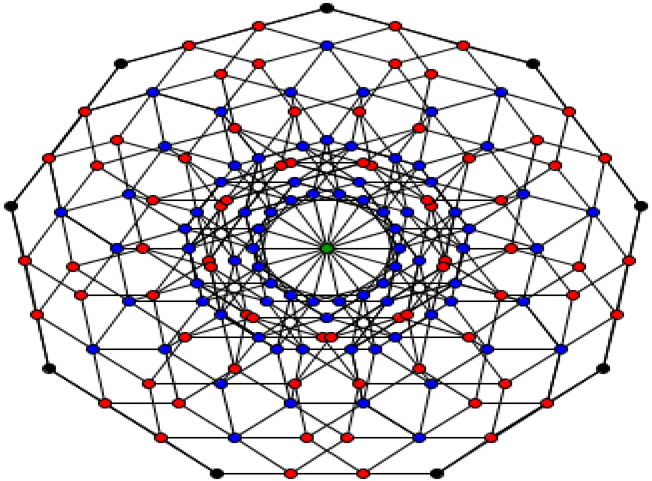
研究結果－算術 k邊形的性質

探討算術 k 邊形中由外至內層的個數N



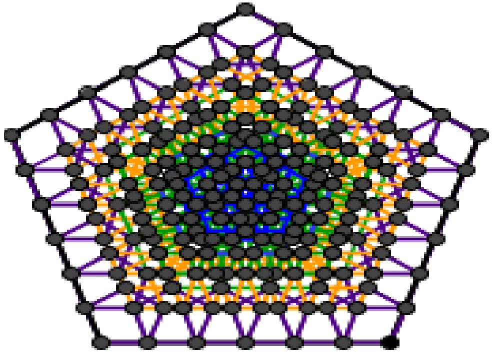
$P_5(4)$

$N = 4$



$P_9(3)$

$N = 5$



$P_5(6)$

$N = 5$

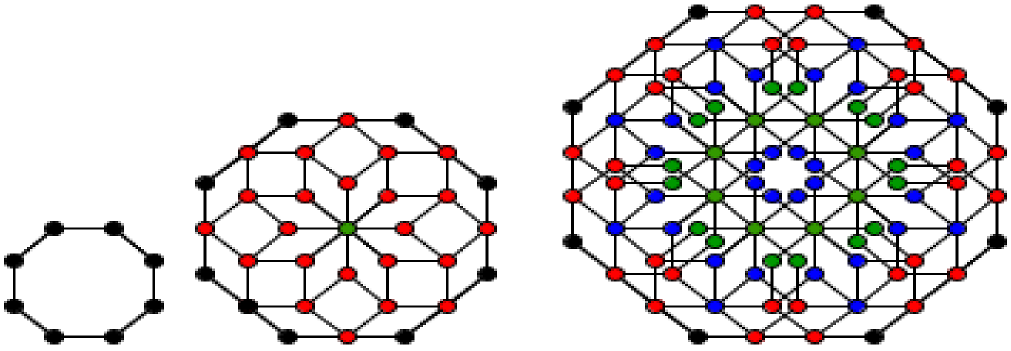
研究結果－算術 k 邊形的性質

k 項式定理中 k 變數項性質探討

設 $N_k(n,m)$ 為 n 次 k 項式定理展開式中的每個 m 變數項的項數，其中 $1\le m\le k$，則

【定理 5】 $C_1^k H_{n-1}^1 + C_2^k H_{n-2}^2 + C_3^k H_{n-3}^3 + \cdots + C_k^k H_{n-k}^k = H_n^k$

黑色點是單變數項、
紅色點是二變數項及
藍色點是三變數項、
綠色點是二及三變數項

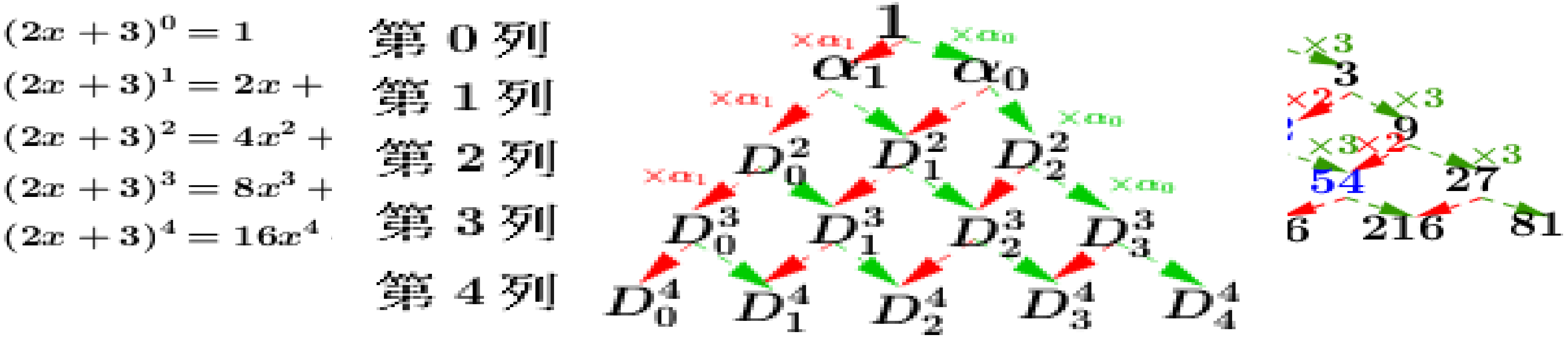


$P_8(1)$ $P_8(2)$ $P_8(3)$

研究結果—探討$k(n-1)$次k項式定理中的算術三角形

【定理 6】$(\alpha_1 x + \alpha_0)^n$

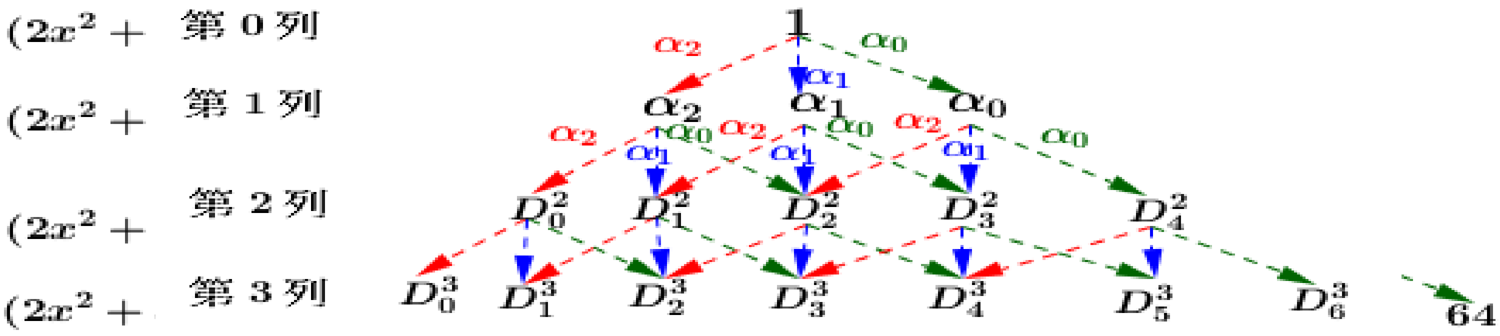
$$\begin{cases} D_r^n = 0, \quad \text{其中 } r < 0 \text{ 或 } r > n \\ D_r^n = \alpha_0 D_{r-1}^{n-1} + \alpha_1 D_r^{n-1}, \text{其中 } 0 \le r \le n \end{cases}$$



研究結果-探討 $k(n-1)$次 k 項式定理中的算術三角形

【定理 7】$(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^n$

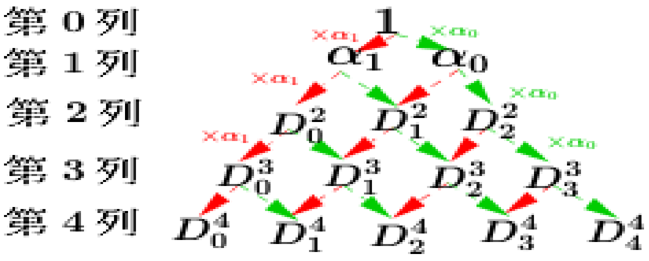
$$\begin{cases} D_r^n = 0, \quad 其中\ r < 0\ 或\ r > 2n \\ D_r^n = \alpha_0 D_{r-2}^{n-1} + \alpha_1 D_{r-1}^{n-1} + \alpha_2 D_r^{n-1}, 其中\ 0 \le r \le 2n \end{cases}$$

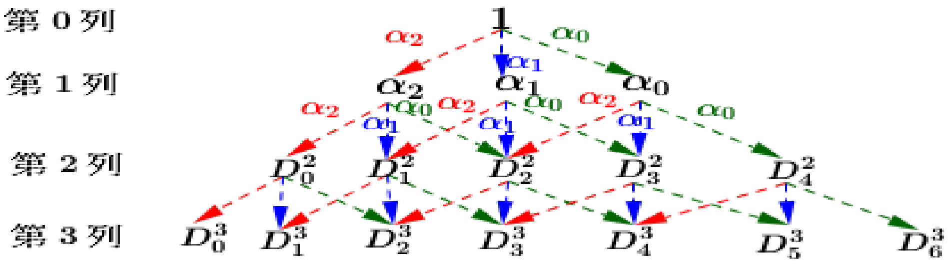


研究結果－探討$k(n-1)$次k項式定理中的算術三角形

【定理 8】$(\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\text{L}+\alpha_0)^n$

$$\begin{cases} D_r^n=0, \quad \text{其中 } r<0 \text{ 或 } r>(k-1)n \\ D_r^n=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i D_{r+i-(k-1)}^{n-1}, \text{其中 } 0\le r\le(k-1)n \end{cases}$$





研究結果—探討k項式中的算術三角形性質

【定理 9】

$$
\begin{array}{lllllll}
 & C_0^0 & & & & & \\
a_0 & & & & & & \\
 & C_0^1 & C_1^1 & & & & \\
a_1 & & & & & & \\
 & C_0^2 & C_1^2 & C_2^2 & & & \\
a_2 & & & & & & \\
 & C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & & \\
a_3 & & & & & & \\
 & C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 & \\
a_4 & & & & & & \\
 & C_0^5 & C_1^5 & C_2^5 & C_3^5 & C_4^5 & C_5^5
\end{array}
$$

(i) $a_n=\sum_{r=0}^{[n/2]} C_r^{n-r}$，其中[ ]為高斯符號。

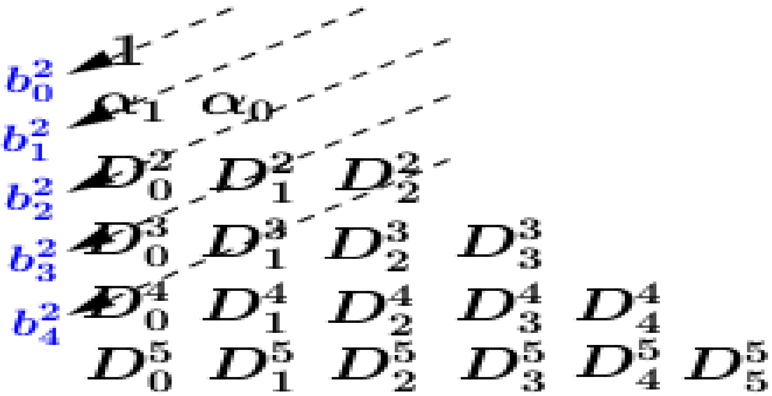
(ii) $\{a_n\}$ 為費氏數列 $\{F_n\}$。

$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(iii)

研究結果－探討k項式中的算術三角形性質

【**定理 10**】



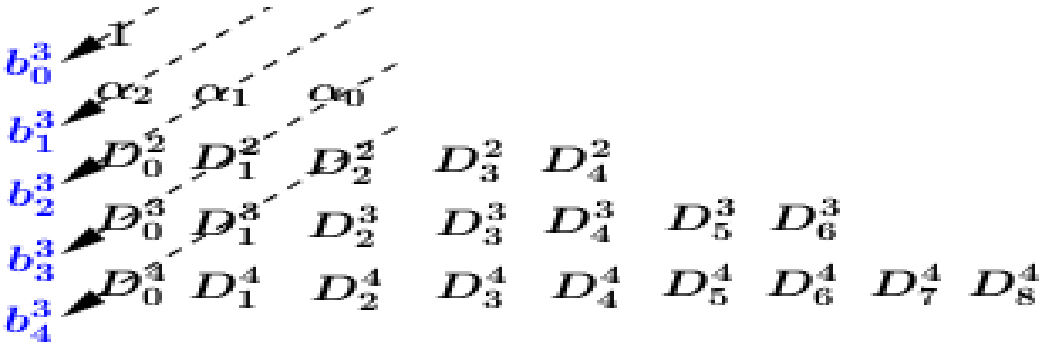
(i) $b_n^2 = \sum_{r=0}^{[n/2]} D_r^{n-r}$ ，其中[ ]為高斯符號。

(ii) $\{b_n^2\}$ 為2階實係數線性遞迴數列。

$b_0^2 = 1, b_1^2 = \alpha_1,\quad b_n^2 = \alpha_0 b_{n-1}^2 + \alpha_1 b_{n-2}^2, n \geq 2$

研究結果—探討k項式中的算術三角形性質

【定理 11】



(i) $b_n^3=\sum_{r=0}^{n-\lceil n/3\rceil} D_r^{n-r}$，其中$\lceil\ \rceil$為上高斯符號。

(ii) $\{b_n^3\}$ 為3階實係數線性遞迴數列。

$b_0^3=1, b_1^3=\alpha_2, b_2^3=\alpha_1+D_0^2,\quad b_n^3=\alpha_0 b_{n-1}^3+\alpha_1 b_{n-2}^3+\alpha_2 b_{n-3}^3, n\geq 3$

研究結果－探討k項式中的算術三角形性質

算術三角形 ⟶ 斜排數列

【**定理 12**】

(i) $b_n^k = \sum_{r=0}^{n-\lceil n/k \rceil} D_r^{n-r}$，其中$\lceil \ \rceil$為上高斯符號。

(ii) $\{b_n^k\}$ 為 k 階實係數線性遞迴數列。

$$\begin{cases} b_0^k = 1, b_1^k = \alpha_k, b_2^k = \alpha_{k-1} + D_0^k, \cdots, b_k^k = D_0^k + D_1^{k-1} + \cdots + D_{k-2}^2 + \alpha_0 \\ b_n^k = \alpha_0 b_{n-1}^k + \alpha_1 b_{n-2}^k + \cdots + \alpha_k b_{n-k}^k, n \ge k \end{cases}$$

研究結果—應用k項式中的算術三角形

應用 k 項式中的算術三角形

【性質 5】設 n 次二項式 $(\alpha_1 x+\alpha_0)^n$ 的展開式分離出係數的算術三角形，若 α_0,α_1 均為一位數字，則其算術三角形中數字考慮十進位進位後，第n列數字代表二位正整數的n次方。

【定理 11】設$(k-1)n$次k項式$(\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\cdots+\alpha_0)^n$的展開式分離出係數的算術三角形，若$\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 均為一位數字，則其算術三角形中數字考慮十進位進位後，第n列數字代表k位正整數的n次方。

【定理 12】設 $2(k-1)n$ 次 k^2項式$(\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\cdots+\alpha_0)^n(\beta_{k-1}x^{k-1}+\beta_{k-2}x^{k-2}+\cdots+\beta_0)^{n-1}$的展開式分離出係數的算術三角形，若 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\beta_0,\beta_1,\cdots,\beta_k$ 均為一位數字，則其算術三角形中數字考慮十進位進位後，第n列會有$2kn-k-2n+2$ 或 $2kn-k-2n+3$ 個位數。

【定理 13】

1	→ 1	→ $12^0=1$
1 2	→ 1 2	→ $12^1=12$
1 4 4	→ 1 4 4	→ $12^2=144$
1 6 12 8	→ 1 7 2 8	→ $12^3=1728$
1 8 24 32 16	→ 2 0 7 3 6	→ $12^4=20736$
1 10 40 80 80 32	→ 2 4 8 8 3 2	→ $12^5=248832$

第 n 列數字可代表二位正整數的 n 次方

研究結果−應用k項式中的算術三角形

【定理 13】

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & 2 & 3 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & 4 & 10 & 12 & 9 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & 6 & 21 & 44 & 63 & 54 & 27 & & & & & \\
 & & & & 1 & 8 & 36 & 104 & 214 & 312 & 324 & 216 & 81 & & & &
\end{array}
\begin{array}{c}
\longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow \\ \longrightarrow
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & 2 & 3 & & & \\
 & & 1 & 5 & 1 & 2 & 9 & & \\
 & 1 & 8 & 6 & 0 & 8 & 6 & 7 & \\
2 & 2 & 8 & 8 & 8 & 6 & 6 & 4 & 1
\end{array}
\begin{array}{l}
\longrightarrow 123^0 = 1 \\
\longrightarrow 123^1 = 123 \\
\longrightarrow 123^2 = 15129 \\
\longrightarrow 123^3 = 1860867 \\
\longrightarrow 123^4 = 228886641
\end{array}
$$

第n列數字可代表三位正整數的n次方

研究結果−應用k項式中的算術三角形

【定理 14】

三角形		結果
1	→	$11^0 = 1$ (1位)
1　1	→	$11^1 \times 12^0 = 11$ (2位)
1　4　5　2	→	$11^2 \times 12^1 = 1452$ (4位)
1　9　1　6　6　4	→	$11^3 \times 12^2 = 191664$ (6位)
2　5　2　9　9　6　4　8	→	$11^4 \times 12^3 = 25299648$ (8位)

$2kn - k - 2n + 2$ 或 $2kn - k - 2n + 3$個位數

研究結果—應用k項式中的算術三角形

【定理 14】

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1\ 1\ 1 \\
1\ 3\ 7\ 9\ 9\ 5\ 2 \\
1\ 7\ 1\ 5\ 5\ 5\ 6\ 3\ 2\ 6\ 4
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
\to 111^0 = 1\ (1位) \\
\to 111^1 \times 112^0 = 111\ (3位) \\
\to 111^2 \times 112^1 = 1379952\ (7位) \\
\to 111^3 \times 112^2 = 17155563264\ (11位)
\end{array}
$$

$2kn-k-2n+2$ 或 $2kn-k-2n+3$個位數

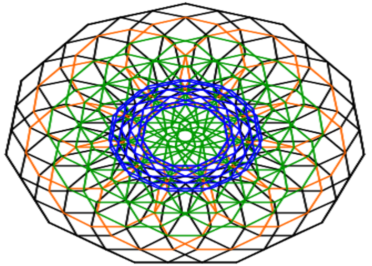
結論與未來展望

本研究以「**二項式定理推廣k項式定理**」為核心，我們知道二項式係數可成巴斯卡三角形，即是一個算術三角形。事實上，**多項式定理的展開不同類項**共有 $H_n^k = C_n^{n+k-1}$，當 n 很大時，值是很大的，參見下圖中共有 $H_{11}^3 = C_{11}^{13} = 78$ 的不同類項，所以我們拓展 k 項式定理展開式的幾何表現，稱為**算術 k 邊形**。

另外，我們推廣 k 項式係數定理，因此，就可以串起了**代數下的幾何描述**，有 可分的意義，**充份展現數與形的完美搭配** 頂點與邊微妙的幾何價值。

$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{11})^3$

$H_{11}^3 = C_{11}^{13} = 78$



$P_{11}(3)$

結論與未來展望

多項式定理衍生出幾何規律的美，我們改變 k 項式定理的 k 變數，得到算術三角形，這是**巴斯卡三角形的推廣**，我們推導出巴斯卡定理的推廣式，可說明 k 項式中算術三角形的延伸性，這是一個有趣的結果。

其次，我們探討 k 項式中**算術三角形的斜排數列**，**此數列是 k 階實係數線性遞迴數列**。此外，將 k 項式中算術三角形應用於**任意正整數的冪次方**，這是本研究的應用範疇。

參考資料

[1] 吳振奎 (1993)。**斐波那契數列**。臺北市：九章出版社。

[2] 范谷瑜(2015)。畫圖「點」驚-多項式定理點出動面成體。中華民國第55屆中小學科學展覽會高中組數學科。

[3] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**，**33**(4)，47-62。

[4] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**，**34**(1)，35-57。

[5] 許介彥(2004)。巴斯卡三角形的幾個性質。**科學教育月刊**。**275**，20-28。

[6] A. W. F. Edwards (2002)。Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea。London：Charles Griffin &

心得回饋


數學老師.......!
為什麼當初你不直
接這樣告訴我?
9x1=9
9x2=18
9x3=27
9x4=36
9x5=45
9x6=54
9x7=63
9x8=72
9x9=81
9x10=90