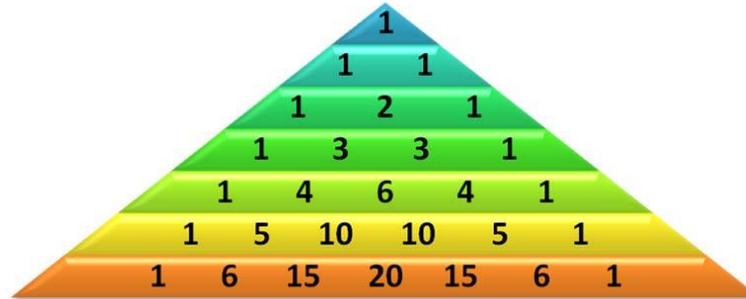


多項式定理的幾何表現與 推廣巴斯卡三角形之探討與應用



關鍵詞：巴斯卡三角形、多項式定理、
線性遞迴數列

陳暉潔、王芸若、楊承恩

具體成效



1. 參賽校內科展榮獲優等

多項式定理的幾何表現與巴斯卡三角形推廣之探討

2. 通過青培計畫初審

多項式定理的幾何表現與推廣巴斯卡三角形之探討與應用

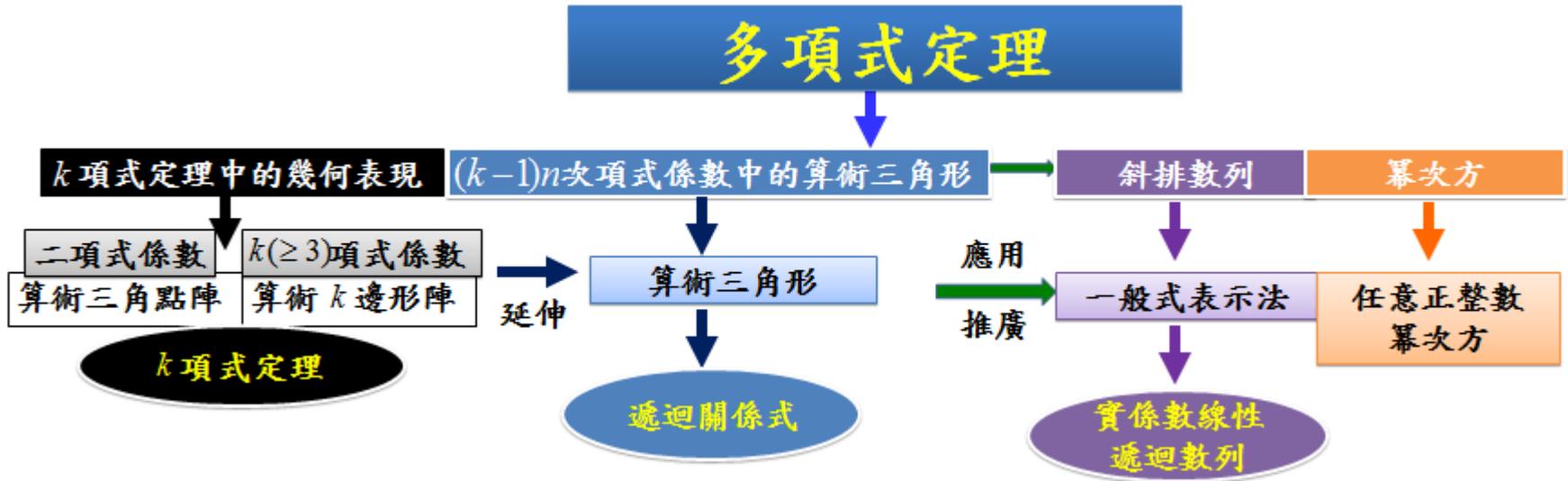
3. 參賽全國中小學小論文特優

建構多項式定理的幾何圖形及其性質之探討



研究目標與研究方法

多項式定理



$$(x_1 + x_2)^n = \sum_{r=0}^n C_r^n x_1^{n-r} x_2^r$$

$(x_1 + x_2)^0 = 1$	1
$(x_1 + x_2)^1 = x_1 + x_2$	1 1
$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$	1 2 1
$(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$	1 3 3 1
$(x_1 + x_2)^4 = x_1^4 + 4x_1^3x_2 + 6x_1^2x_2^2 + 4x_1x_2^3 + x_2^4$	1 4 6 4 1
$(x_1 + x_2)^5 = x_1^5 + 5x_1^4x_2 + 10x_1^3x_2^2 + 10x_1^2x_2^3 + 5x_1x_2^4 + x_2^5$	1 5 10 10 5 1

巴斯卡三角形是算術三角形

研究方法-定義1及定義2

【定義1】 (k 項式定理) 設 n_1, n_2, \dots, n_k, n 為非負整數，且 $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ 為 k 項式，則

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} \binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} \prod_{i=1}^k x_i^{n_i} \quad (1)$$

其中 k 項式係數 $\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$, $0 \leq n_1, n_2, \dots, n_k \leq n$,

我們叫(1)式為 k 項式定理(Multinomial theorem)。

由巴斯卡定理： $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$ 可推廣為 k 項式係數定理：

$$\binom{n}{n_1, n_2, \dots, n_k} = \binom{n-1}{n_1-1, n_2, \dots, n_k} + \binom{n-1}{n_1, n_2-1, \dots, n_k} + \dots + \binom{n-1}{n_1, n_2, \dots, n_k-1}$$

研究方法-定義1及定義2

【定義2】

本研究將 k 項式 $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$ 改為 $(k-1)n$ 次 k 項式 $\alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \cdots + \alpha_0$ ，則

$$(\alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \cdots + \alpha_0)^n = \sum_{r=0}^{(k-1)n} D_r^n x^{(k-1)n-r} \quad (2)$$

其中 k 項式係數 D_r^n ， $0 \leq r \leq (k-1)n$ 。



在 $(k-1)n$ 次 k 項式的算術三角形中
第 n 列第 r 行的元素



$x^{(k-1)n-r}$ 的係數

研究方法-定義1及定義2

算術三角形

$(\alpha_1x + \alpha_0)^0$ 第 0 列	1	$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^0$ 第 0 列	1
$(\alpha_1x + \alpha_0)^1$ 第 1 列	$\alpha_1 \quad \alpha_0$	$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^1$ 第 1 列	$\alpha_2 \quad \alpha_1 \quad \alpha_0$
$(\alpha_1x + \alpha_0)^2$ 第 2 列	$D_0^2 \quad D_1^2 \quad D_2^2$	$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^2$ 第 2 列	$D_0^2 \quad D_1^2 \quad D_2^2 \quad D_3^2 \quad D_4^2$
$(\alpha_1x + \alpha_0)^3$ 第 3 列	$D_0^3 \quad D_1^3 \quad D_2^3 \quad D_3^3$	$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^3$ 第 3 列	$D_0^3 \quad D_1^3 \quad D_2^3 \quad D_3^3 \quad D_4^3 \quad D_5^3 \quad D_6^3$
$(\alpha_1x + \alpha_0)^4$ 第 4 列	$D_0^4 \quad D_1^4 \quad D_2^4 \quad D_3^4 \quad D_4^4$	$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^4$ 第 4 列	$D_0^4 \quad D_1^4 \quad D_2^4 \quad D_3^4 \quad D_4^4 \quad D_5^4 \quad D_6^4 \quad D_7^4 \quad D_8^4$

$(2x + 3)^0 = 1$	第 0 列	1
$(2x + 3)^1 = 2x + 3$	第 1 列	2 3
$(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$	第 2 列	4 12 9
$(2x + 3)^3 = 8x^3 + 36x^2 + 54x + 27$	第 3 列	8 36 54 27
$(2x + 3)^4 = 16x^4 + 96x^3 + 216x^2 + 216x + 81$	第 4 列	16 96 216 216 81



研究方法-定義1及定義2

算術三角形

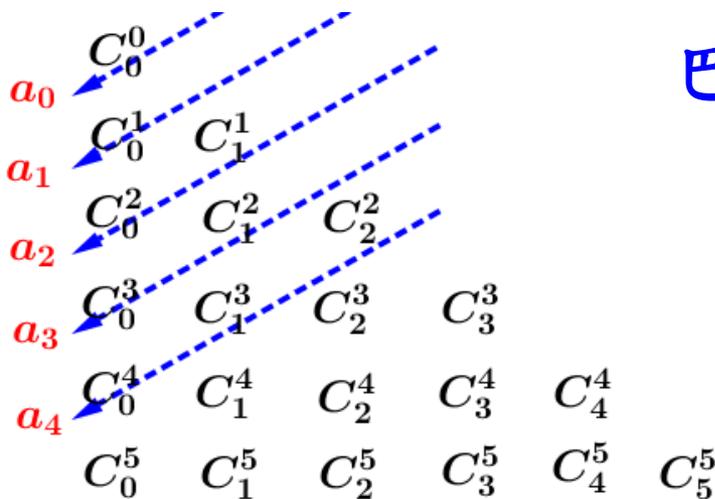
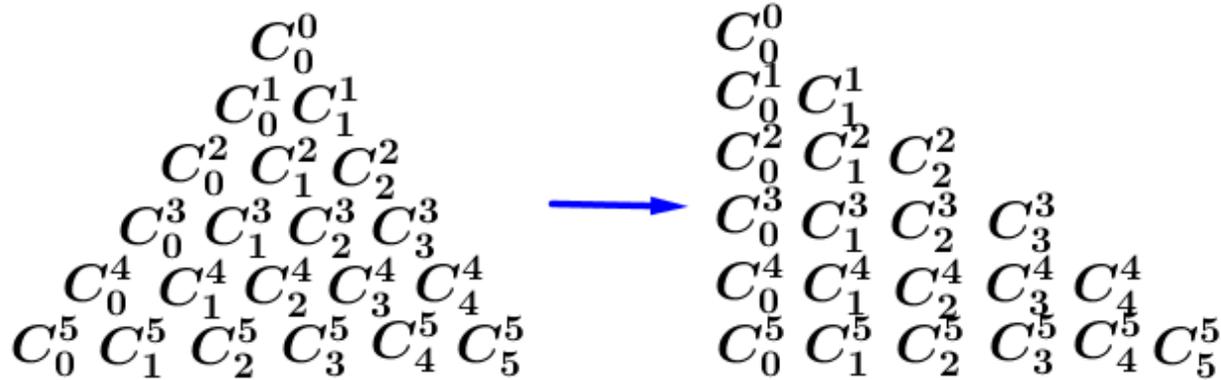
$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^0$ 第 0 列									1
$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^1$ 第 1 列					α_2	α_1	α_0		
$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^2$ 第 2 列				D_0^2	D_1^2	D_2^2	D_3^2	D_4^2	
$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^3$ 第 3 列			D_0^3	D_1^3	D_2^3	D_3^3	D_4^3	D_5^3	D_6^3
$(\alpha_2x^2 + \alpha_1x + \alpha_0)^4$ 第 4 列	D_0^4	D_1^4	D_2^4	D_3^4	D_4^4	D_5^4	D_6^4	D_7^4	D_8^4

$(2x^2 + 3x + 4)^0$ 第 0 列									1
$(2x^2 + 3x + 4)^1$ 第 1 列					2	3	4		
$(2x^2 + 3x + 4)^2$ 第 2 列				4	12	25	24	16	
$(2x^2 + 3x + 4)^3$ 第 3 列	8	36	102	171	204	144	64		



研究方法-斜排數列

斜排數列



巴斯卡三角形中的斜排數列

$$\{a_n\} : a_1, a_2, a_3, \dots$$

費氏數列

研究方法-斜排數列

斜排數列

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & \alpha_1 & \alpha_0 \\
 & & & & D_0^2 & D_1^2 & D_2^2 \\
 & & & D_0^3 & D_1^3 & D_2^3 & D_3^3 \\
 & & D_0^4 & D_1^4 & D_2^4 & D_3^4 & D_4^4 \\
 D_0^5 & D_1^5 & D_2^5 & D_3^5 & D_4^5 & D_5^5
 \end{array}
 \quad \longrightarrow \quad
 \begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & \alpha_1 & \alpha_0 \\
 & & & & D_0^2 & D_1^2 & D_2^2 \\
 & & & D_0^3 & D_1^3 & D_2^3 & D_3^3 \\
 & & D_0^4 & D_1^4 & D_2^4 & D_3^4 & D_4^4 \\
 D_0^5 & D_1^5 & D_2^5 & D_3^5 & D_4^5 & D_5^5
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & & & 1 \\
 & & & & & \alpha_1 & \alpha_0 \\
 & & & & D_0^2 & D_1^2 & D_2^2 \\
 & & & D_0^3 & D_1^3 & D_2^3 & D_3^3 \\
 & & D_0^4 & D_1^4 & D_2^4 & D_3^4 & D_4^4 \\
 D_0^5 & D_1^5 & D_2^5 & D_3^5 & D_4^5 & D_5^5
 \end{array}$$

b_0^2
 b_1^2
 b_2^2
 b_3^2
 b_4^2

n 次二項式係數中的斜排數列

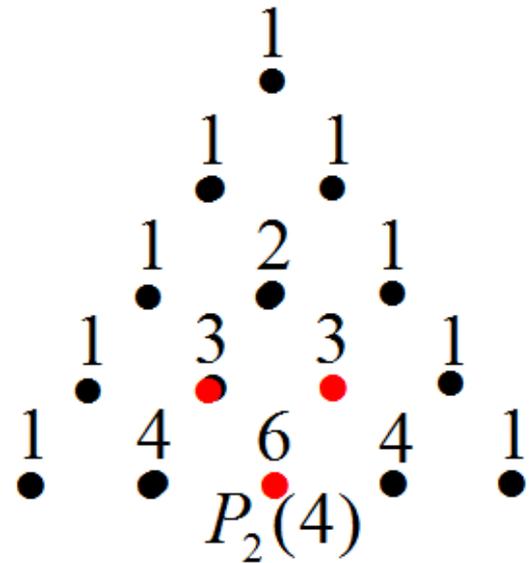
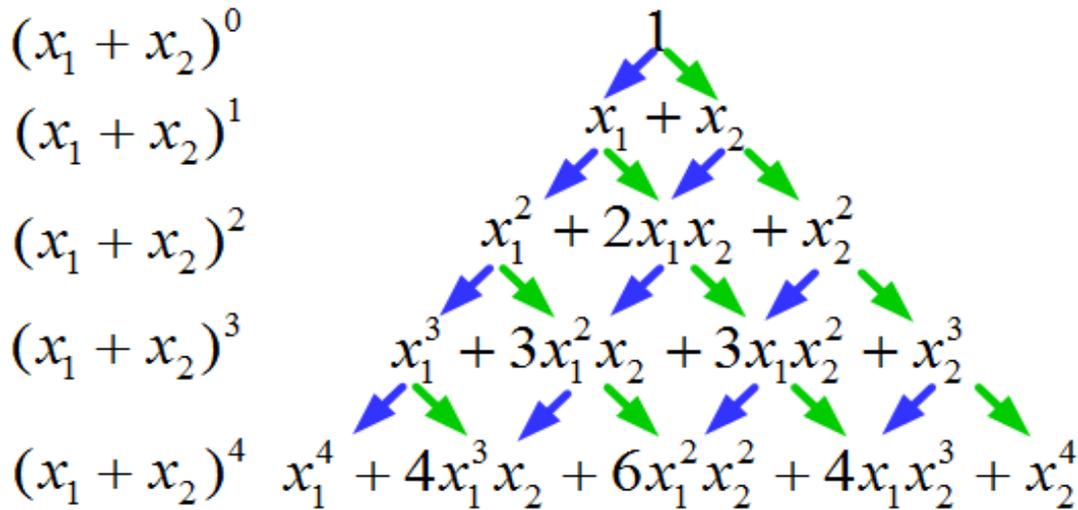
$$\{b_n^2\} : b_1^2, b_2^2, b_3^2, \dots$$

是甚麼數列呢?

研究結果-探討 k 項式定理中的算術 k 邊形

二項式定理： $(x_1 + x_2)^n$

【性質1】



算術三角點陣

巴斯卡定理： $C_r^n = C_{r-1}^{n-1} + C_r^{n-1}$

研究結果-建構 k 項式定理中的算術 k 邊形

由於 k 項式係數滿足分配律，即

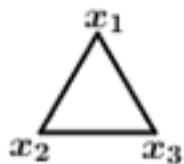
$$(x_1 + \cdots + x_k)^2 = x_1(x_1 + \cdots + x_k) + x_2(x_1 + \cdots + x_k) + \cdots + x_k(x_1 + \cdots + x_k)$$

$$(x_1 + \cdots + x_k)^3 = x_1(x_1 + \cdots + x_k)^2 + x_2(x_1 + \cdots + x_k)^2 + \cdots + x_k(x_1 + \cdots + x_k)^2$$

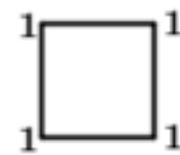
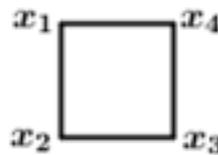
⋮

$$(x_1 + \cdots + x_k)^n = x_1(x_1 + \cdots + x_k)^{n-1} + x_2(x_1 + \cdots + x_k)^{n-1} + \cdots + x_k(x_1 + \cdots + x_k)^{n-1}$$

由分配律概念就可建構出算術 k 邊形

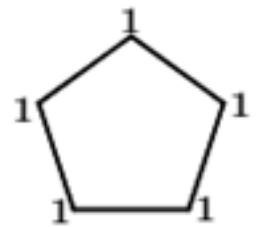
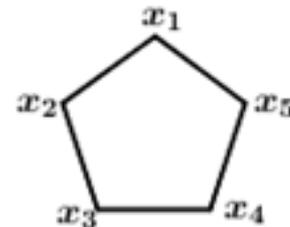


$P_3(1)$



算術四邊形

$P_4(1)$



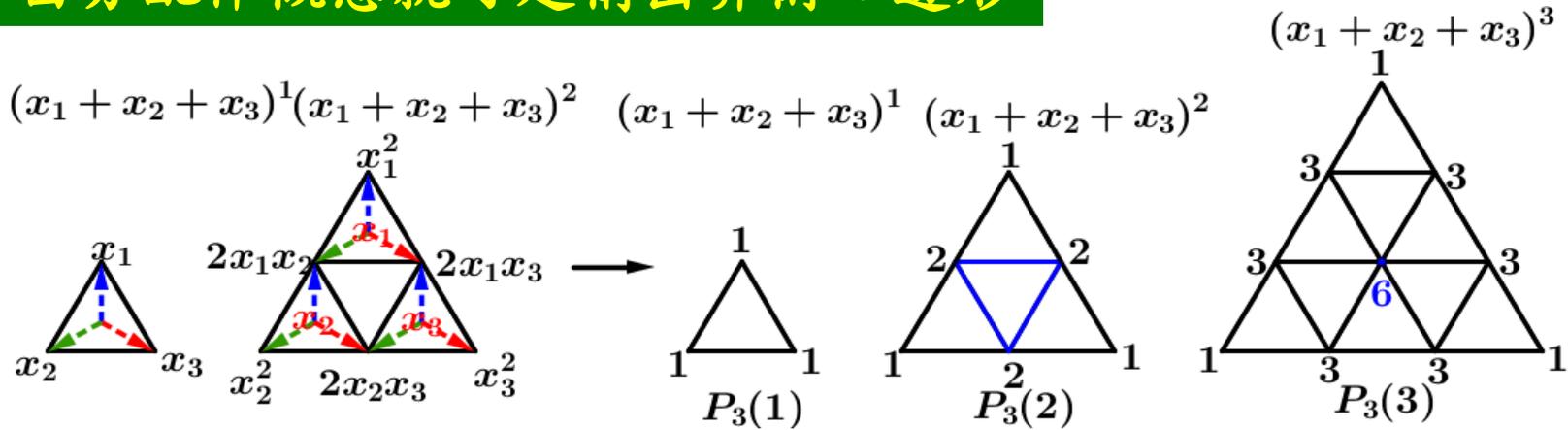
算術五邊形

$P_5(1)$

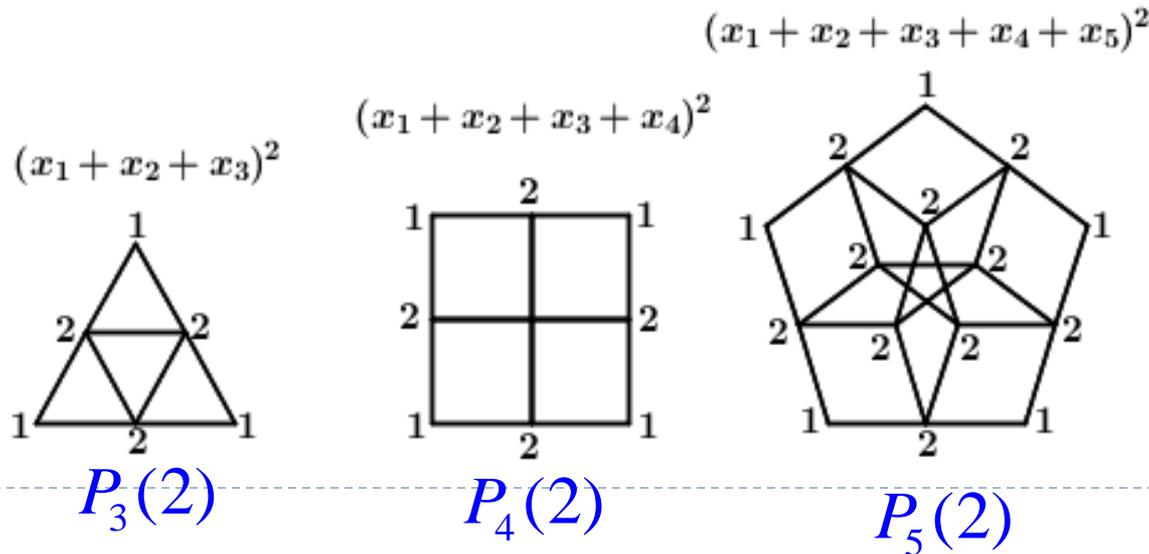
$(x_1 + \cdots + x_k)^1 = x_1 + \cdots + x_k$ 的幾何表現

研究結果-建構 k 項式定理中的算術 k 邊形

由分配律概念就可建構出算術 k 邊形



算術三角形

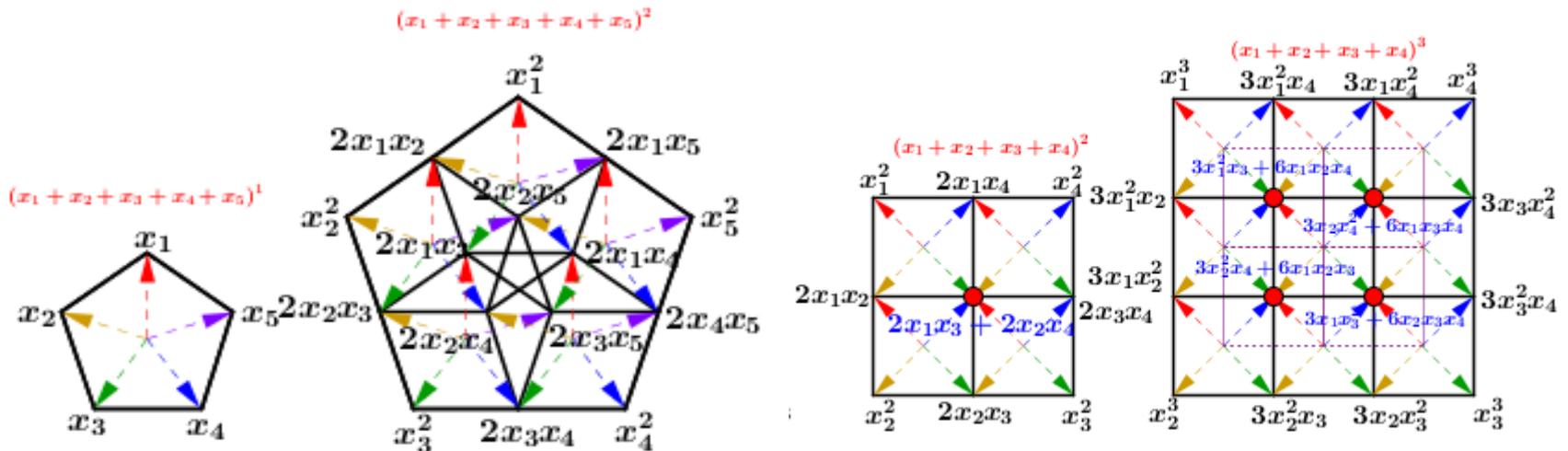


研究結果-探討算術 k 邊形的性質

算術 k 邊形性質

【性質 2】

- (i) 若 k 為奇數時， $P_k(n)$ 中每個頂點代表僅一項的係數。
- (ii) 若 k 為偶數時， $P_k(n)$ 中至少有一個頂點代表二項以上的係數。

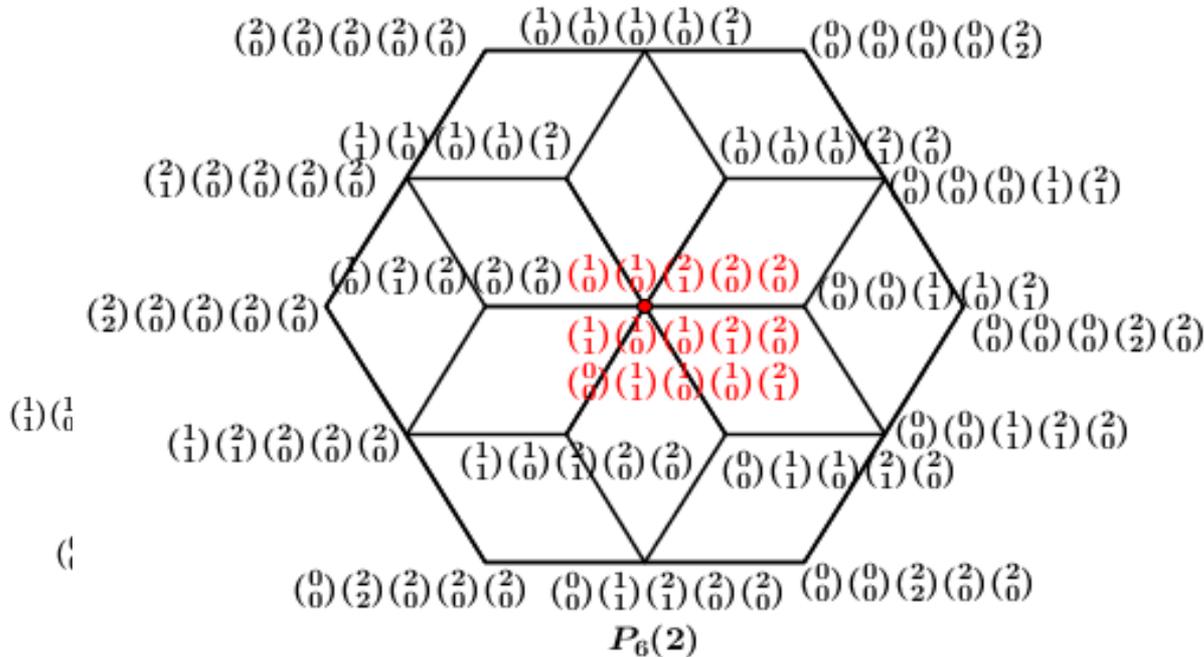


研究結果-探討算術 k 邊形的性質

【定理 2】

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, \dots, n_k} = \binom{n_1 + n_2}{n_2} \binom{n_1 + n_2 + n_3}{n_3} \binom{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}{n_4} \dots \binom{n}{n_k}$$

算術 k 邊形中每個頂點可用 $k-1$ 個巴斯卡係數的乘積表示。



研究結果-算術 k 邊形的性質

k 項式定理中 k 變數項性質探討 【定理 3】

設 $N_k(n, m)$ 為 n 次 k 項式定理展開式中的每個 m 變數項的項數，其中 $1 \leq m \leq k$ ，則

$N_k(n, m)$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	$m=5$
$N_3(1, m)$	3	0	0	0	0
$N_3(2, m)$	3	3	0	0	0
$N_3(3, m)$	3	6	1	0	0
$N_3(4, m)$	3	9	3	0	0
$N_3(5, m)$	3	12	6	0	0
$N_4(1, m)$	4	0	0	0	0
$N_4(2, m)$	4	6	0	0	0
$N_4(3, m)$	4	8	3	0	0
$N_4(4, m)$	4	12	9	0	0
$N_4(5, m)$	4	16	18	0	0
$N_7(3, m)$	7	42	35	0	0
$N_7(4, m)$	7	63	105	35	0
$N_7(5, m)$	7	84	210	140	21

單變數項: x_1^3, x_2^3

二變數項: $x_1^2 x_2, x_2^2 x_1$

三變數項: $x_1 x_2 x_3$

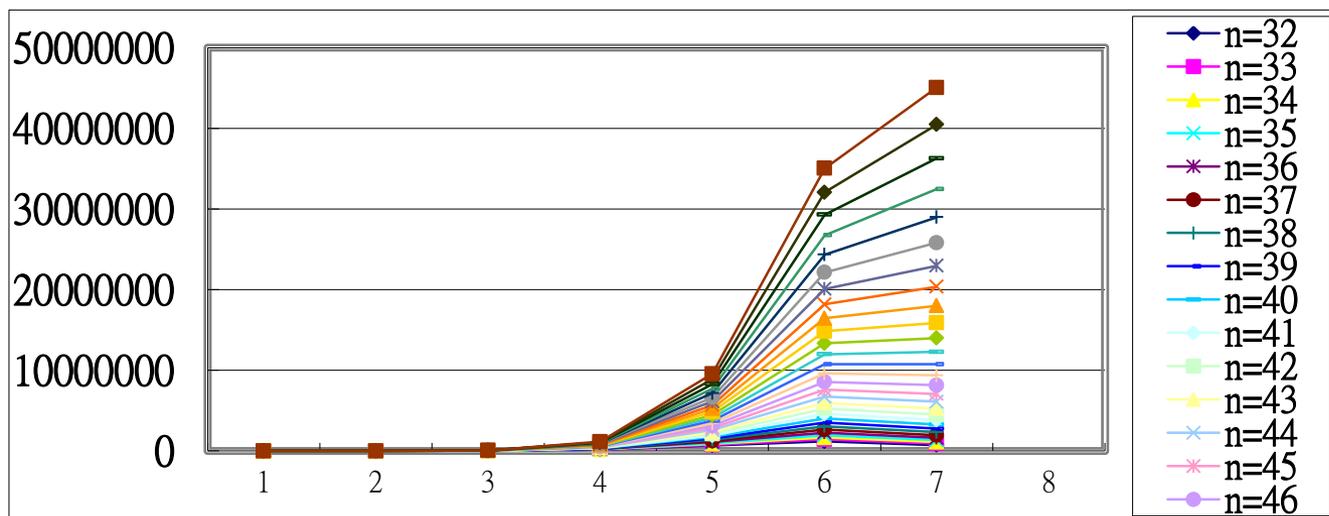
$$N_k(n, m) = \frac{1}{m} \left[C_1^{k-m+1} N_k(n-1, m-1) + C_1^m N_k(n-1, m) \right]$$

研究結果-算術 k 邊形的性質

k 項式定理中 k 變數項性質探討

設 $N_k(n, m)$ 為 n 次 k 項式定理展開式中的每個 m 變數項的項數，其中 $1 \leq m \leq k$ ，則

【定理 4】
$$N_k(n, m) = C_m^k H_{n-m}^m$$



當 $n \rightarrow \infty$ 時， $N_k(n, k)$ 值最大

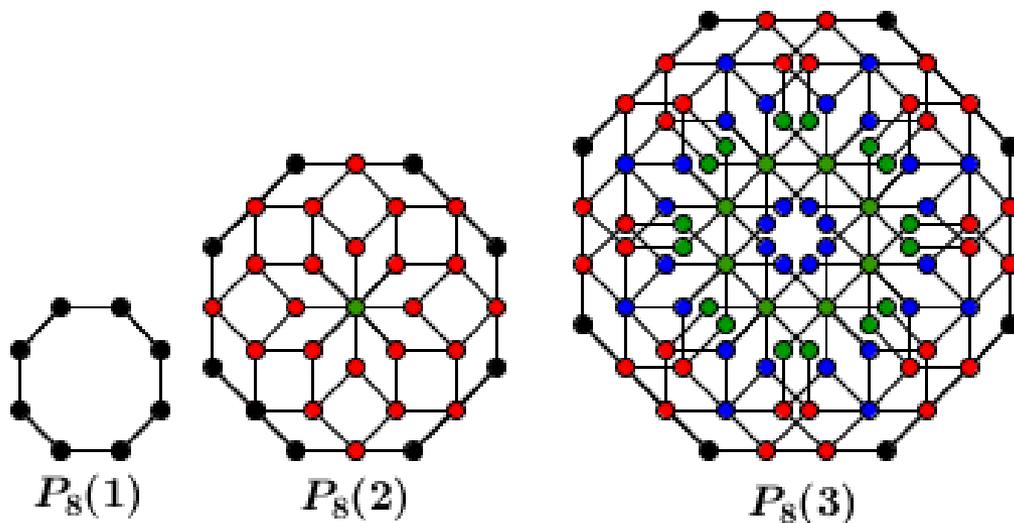
研究結果-算術 k 邊形的性質

k 項式定理中 k 變數項性質探討

設 $N_k(n, m)$ 為 n 次 k 項式定理展開式中的每個 m 變數項的項數，其中 $1 \leq m \leq k$ ，則

【定理 5】
$$C_1^k H_{n-1}^1 + C_2^k H_{n-2}^2 + C_3^k H_{n-3}^3 + \cdots + C_k^k H_{n-k}^k = H_n^k$$

黑色點是單變數項、
紅色點是二變數項及
藍色點是三變數項、
綠色點是二及三變數
項

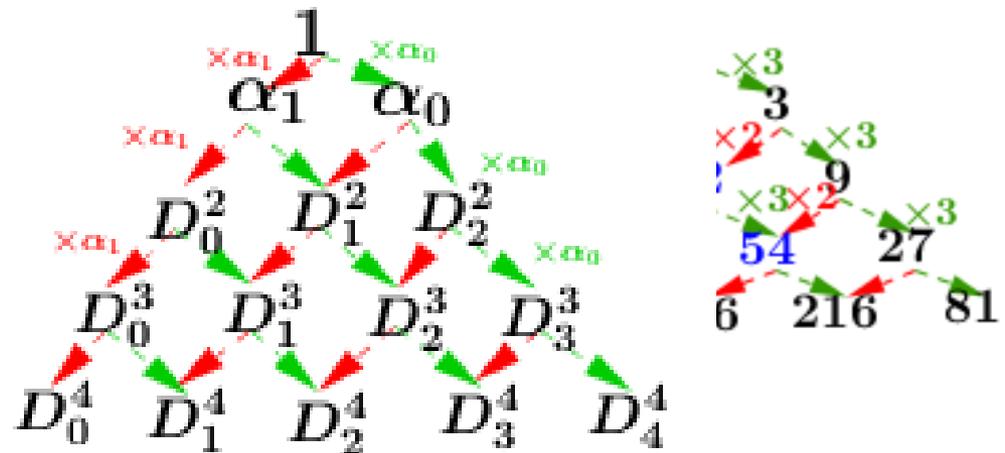


研究結果—探討 $k(n-1)$ 次 k 項式定理中的算術三角形

【定理 6】 $(\alpha_1 x + \alpha_0)^n$

$$\begin{cases} D_r^n = 0, & \text{其中 } r < 0 \text{ 或 } r > n \\ D_r^n = \alpha_0 D_{r-1}^{n-1} + \alpha_1 D_r^{n-1}, & \text{其中 } 0 \leq r \leq n \end{cases}$$

$(2x + 3)^0 = 1$ 第 0 列
 $(2x + 3)^1 = 2x +$ 第 1 列
 $(2x + 3)^2 = 4x^2 +$ 第 2 列
 $(2x + 3)^3 = 8x^3 +$ 第 3 列
 $(2x + 3)^4 = 16x^4$ 第 4 列



研究結果—探討 $k(n-1)$ 次 k 項式定理中的算術三角形

【定理 7】 $(\alpha_2 x^2 + \alpha_1 x + \alpha_0)^n$

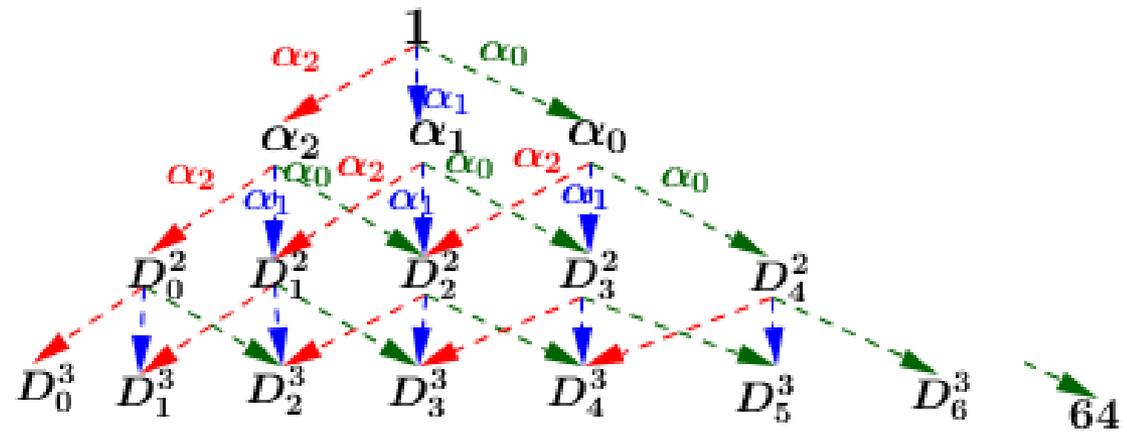
$$\left\{ \begin{array}{l} D_r^n = 0, \text{ 其中 } r < 0 \text{ 或 } r > 2n \\ D_r^n = \alpha_0 D_{r-2}^{n-1} + \alpha_1 D_{r-1}^{n-1} + \alpha_2 D_r^{n-1}, \text{ 其中 } 0 \leq r \leq 2n \end{array} \right.$$

$(2x^2 +$ 第 0 列

$(2x^2 +$ 第 1 列

$(2x^2 +$ 第 2 列

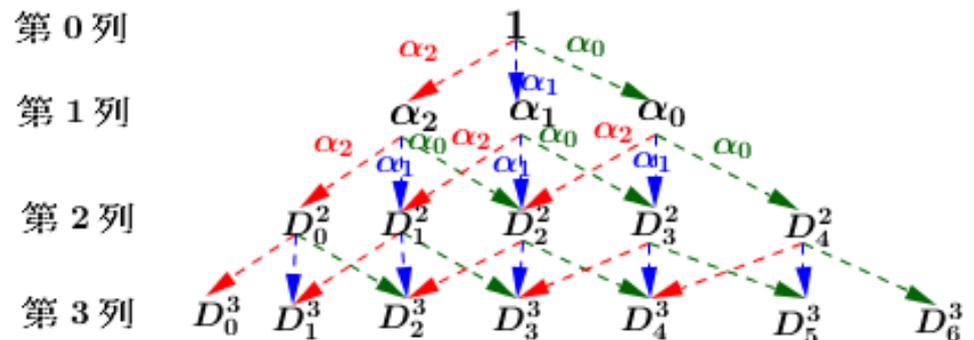
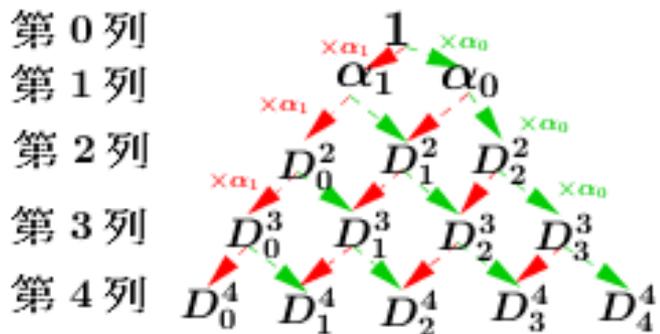
$(2x^2 +$ 第 3 列



研究結果-探討 $k(n-1)$ 次 k 項式定理中的算術三角形

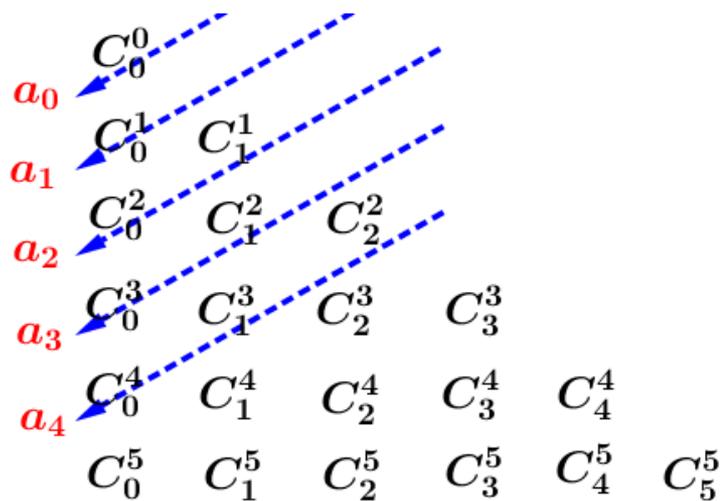
【定理 8】 $(\alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \cdots + \alpha_0)^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_r^n = 0, \text{ 其中 } r < 0 \text{ 或 } r > (k-1)n \\ D_r^n = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_i D_{r+i-(k-1)}^{n-1}, \text{ 其中 } 0 \leq r \leq (k-1)n \end{array} \right.$$



研究結果—探討 k 項式中的算術三角形性質

【定理 9】



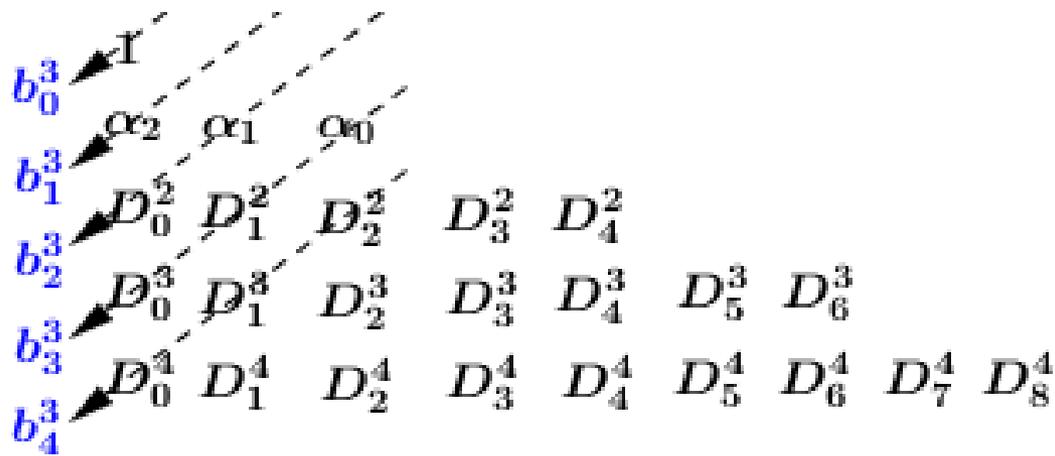
(i) $a_n = \sum_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} C_r^{n-r}$, 其中 $\lfloor \cdot \rfloor$ 為高斯符號。

(ii) $\{a_n\}$ 為費氏數列 $\{F_n\}$ 。

(iii)
$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

研究結果—探討 k 項式中的算術三角形性質

【定理 11】



(i) $b_n^3 = \sum_{r=0}^{n-\lceil n/3 \rceil} D_r^{n-r}$ ，其中 $\lceil \cdot \rceil$ 為上高斯符號。

(ii) $\{b_n^3\}$ 為 3 階實係數線性遞迴數列。

$$b_0^3 = 1, b_1^3 = \alpha_2, b_2^3 = \alpha_1 + D_0^2, \quad b_n^3 = \alpha_0 b_{n-1}^3 + \alpha_1 b_{n-2}^3 + \alpha_2 b_{n-3}^3, n \geq 3$$

研究結果—探討 k 項式中的算術三角形性質

算術三角形 \longrightarrow 斜排數列

【定理 12】

(i) $b_n^k = \sum_{r=0}^{n-\lceil n/k \rceil} D_r^{n-r}$ ，其中 $\lceil \quad \rceil$ 為上高斯符號。

(ii) $\{b_n^k\}$ 為 k 階實係數線性遞迴數列。

$$\begin{cases} b_0^k = 1, b_1^k = \alpha_k, b_2^k = \alpha_{k-1} + D_0^k, \dots, b_k^k = D_0^k + D_1^{k-1} + \dots + D_{k-2}^2 + \alpha_0 \\ b_n^k = \alpha_0 b_{n-1}^k + \alpha_1 b_{n-2}^k + \dots + \alpha_k b_{n-k}^k, n \geq k \end{cases}$$

研究結果—應用 k 項式中的算術三角形

應用 k 項式中的算術三角形

【性質 5】 設 n 次二項式 $(\alpha_1 x + \alpha_0)^n$ 的展開式分離出係數的算術三角形，若 α_0, α_1 均為一位數字，則其算術三角形中數字考慮十進位進位後，第 n 列數字代表二位正整數的 n 次方。

【定理 11】 設 $(k-1)n$ 次 k 項式 $(\alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \dots + \alpha_0)^n$ 的展開式分離出係數的算術三角形，若 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k$ 均為一位數字，則其算術三角形中數字考慮十進位進位後，第 n 列數字代表 k 位正整數的 n 次方。

【定理 12】 設 $2(k-1)n$ 次 k^2 項式 $(\alpha_{k-1} x^{k-1} + \alpha_{k-2} x^{k-2} + \dots + \alpha_0)^n (\beta_{k-1} x^{k-1} + \beta_{k-2} x^{k-2} + \dots + \beta_0)^{n-1}$ 的展開式分離出係數的算術三角形，若 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k$ 均為一位數字，則其算術三角形中數字考慮十進位進位後，第 n 列會有 $2kn - k - 2n + 2$ 或 $2kn - k - 2n + 3$ 個位數。

【定理 13】

1
1 2
1 4 4
1 6 12 8
1 8 24 32 16
1 10 40 80 80 32

→
→
→
→
→
→

1
1 2
1 4 4
1 7 2 8
2 0 7 3 6
2 4 8 8 3 2

→ $12^0 = 1$
→ $12^1 = 12$
→ $12^2 = 144$
→ $12^3 = 1728$
→ $12^4 = 20736$
→ $12^5 = 248832$

▶ 第 n 列數字可代表二位正整數的 n 次方

研究結果—應用 k 項式中的算術三角形

【定理 13】

				1					→
			1	2	3				→
		1	4	10	12	9			→
	1	6	21	44	63	54	27		→
1	8	36	104	214	312	324	216	81	→

				1					→ $123^0 = 1$
			1	2	3				→ $123^1 = 123$
		1	5	1	2	9			→ $123^2 = 15129$
	1	8	6	0	8	6	7		→ $123^3 = 1860867$
2	2	8	8	8	6	6	4	1	→ $123^4 = 228886641$

第 n 列數字可代表三位正整數的 n 次方



研究結果—應用 k 項式中的算術三角形

【定理 15】

				1					$\rightarrow 11^0 = 1$ (1位)
			1	1					$\rightarrow 11^1 \times 12^0 = 11$ (2位)
		1	4	5	2				$\rightarrow 11^2 \times 12^1 = 1452$ (4位)
	1	9	1	6	6	4			$\rightarrow 11^3 \times 12^2 = 191664$ (6位)
2	5	2	9	9	6	4	8		$\rightarrow 11^4 \times 12^3 = 25299648$ (8位)

$2kn - k - 2n + 2$ 或 $2kn - k - 2n + 3$ 個位數



研究結果—應用 k 項式中的算術三角形

【定理 14】

1

$$\rightarrow 111^0 = 1 \text{ (1位)}$$

1 1 1

$$\rightarrow 111^1 \times 112^0 = 111 \text{ (3位)}$$

1 3 7 9 9 5 2

$$\rightarrow 111^2 \times 112^1 = 1379952 \text{ (7位)}$$

1 7 1 5 5 5 6 3 2 6 4

$$\rightarrow 111^3 \times 112^2 = 17155563264 \text{ (11位)}$$

$2kn - k - 2n + 2$ 或 $2kn - k - 2n + 3$ 個位數

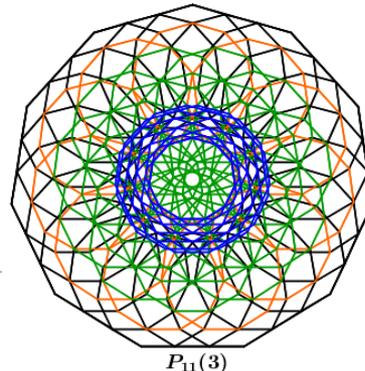


結論與未來展望

本研究以「二項式定理推廣 k 項式定理」為核心，我們知道二項式係數可成巴斯卡三角形，即是一個算術三角形。事實上，多項式定理的展開不同類項共有 $H_n^k = C_n^{n+k-1}$ ，當 k, n 很大時， $H_n^k = C_n^{n+k-1}$ 值是很大的，參見下圖中共有 $H_{11}^3 = C_{11}^{13} = 78$ 的不同類項，所以我們拓展 k 項式定理展開式的幾何表現，稱為**算術 k 邊形**。

另外，我們推廣 k 項式係數定理，因此，就可以串起了代數下的幾何描述，相互間密不可分的意義，充份展現數與形的完美搭配性，也呈現頂點與邊微妙的幾何價值。

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_{11})^3$$



$$H_{11}^3 = C_{11}^{13} = 78$$

結論與未來展望

多項式定理衍生出幾何規律的美，我們改變 k 項式定理的 k 變數，得到**算術三角形**，這是**巴斯卡三角形**的推廣，我們推導出巴斯卡定理的推廣式，可說明 k 項式中算術三角形的延伸性，這是一個有趣的結果。

其次，我們探討 k 項式中算術三角形的斜排數列，此數列是 k 階實係數線性遞迴數列。此外，將 k 項式中算術三角形應用於任意正整數的冪次方，這是本研究的應用範疇。

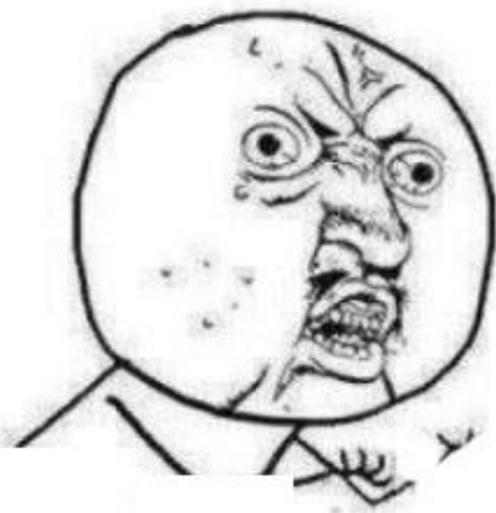


參考資料

- [1] 吳振奎 (1993)。斐波那契數列。臺北市：九章出版社。
- [2] 范谷瑜(2015)。畫圖「點」驚-多項式定理點出動面成體。中華民國第55屆中小學科學展覽會高中組數學科。
- [3] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。數學傳播，**33**(4)，47-62。
- [4] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。數學傳播，**34**(1)，35-57。
- [5] 許介彥(2004)。巴斯卡三角形的幾個性質。科學教育月刊。**275**，20-28。
- [6] A. W. F. Edwards (2002)。Pascal's Arithmetical Triangle: The Story of a Mathematical Idea。London：Charles Griffin & Company LTD。
- [7] Chuan-Chong Chen and Khee-Meng Koh (1992). *Principles and techniques in combinatorics*. Singapore ; River Edge, N.J. : World Scientific.

心得回饋

數學老師.....!



為什麼當初你不直接這樣告訴我？

$$\begin{array}{r} \downarrow \\ 9 \times 1 = 9 \\ 9 \times 2 = 18 \\ 9 \times 3 = 27 \\ 9 \times 4 = 36 \\ 9 \times 5 = 45 \\ 9 \times 6 = 54 \\ 9 \times 7 = 63 \\ 9 \times 8 = 72 \\ 9 \times 9 = 81 \\ 9 \times 10 = 90 \\ \uparrow \end{array}$$