一、前言

1.研究動機

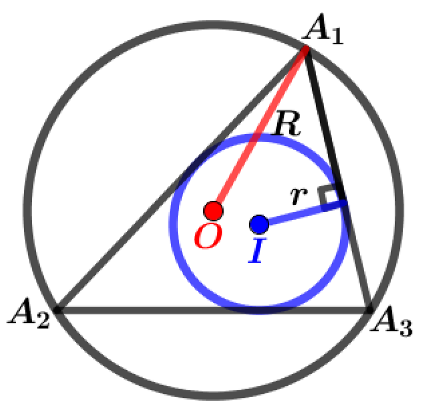
高一上科學數學研究課時，老師提到**一般四邊形並不一定有外接圓或內切圓**，後來我們發現**雙心多邊形既有外接圓還有內切圓**，於是開始閱讀一些書籍及文章(參考資料[1]~[6])，特別是參考資料[1]與[4]中所提到的**歐拉定理**及參考資料[5]與[6]中**與高有關的幾何性質**，產生極度好奇，於是開始進行我們的研究，因而有了這篇作品。最後探討**三角形中共邊三角形的所有內切圓圓心與原三角形的內切圓間的的幾何性質**。

2.研究目的

一、建構雙心三角形及探討雙心三角形中內切圓圓心軌跡參數式。
二、推廣雙心多邊形歐拉不等式，進而導出外接圓與內切圓的面積不等式。
三、探討直角三角形中共邊三角形的內切圓半徑與高有關的幾何性質。
四、探討三角形中共邊三角形的內切圓半徑和及面積和之極值，其極值與高特別有關。
五、探討三角形中共邊三角形的內切圓等分線間的關係式。
六、探討三角形中共邊三角形的n個內切圓圓心與原三角形的內切圓間之幾何性質。

3.定義與預備定理

【定義1】(雙心多邊形，參考資料[1][4][7])
給定一個多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$，若R與r分別為多邊形$A_1A_2\cdots A_n$中以O為圓心的外接圓之半徑與以I為圓心的內切圓半徑，則稱此多邊形為**雙心多邊形** (Bicentric Polygon)。



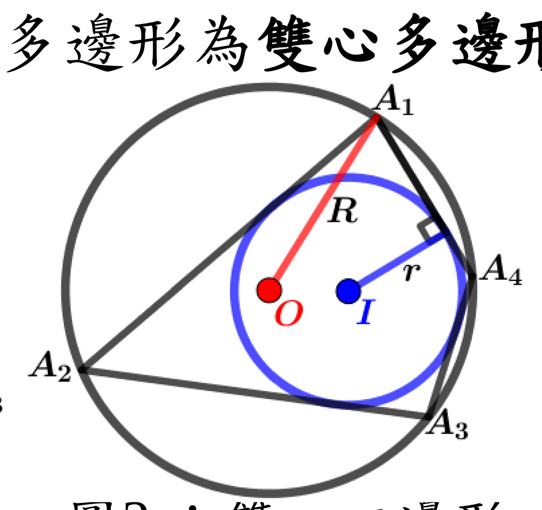


圖1：雙心三角形　圖2：雙心四邊形

【定義】外接圓的面積記作S，內切圓的面積記作S'
【預備定理 1】(雙心三角形的歐拉定理，參考資料[1][4][7])
$R^2-d^2=\overline{A_1I}\times\overline{IB}=2Rr$，其中圓心距 $\overline{OI}$ 為 d。

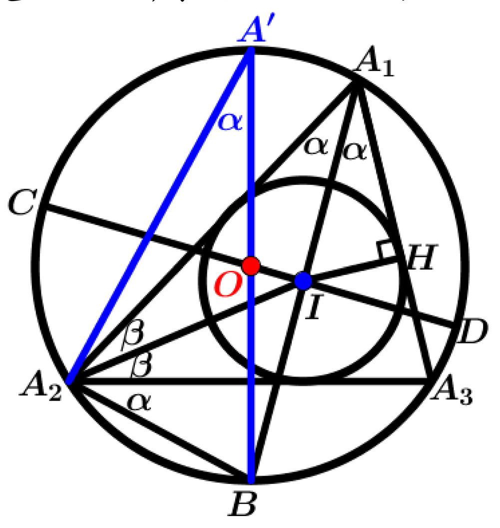


圖3：雙心三角形的歐拉定理

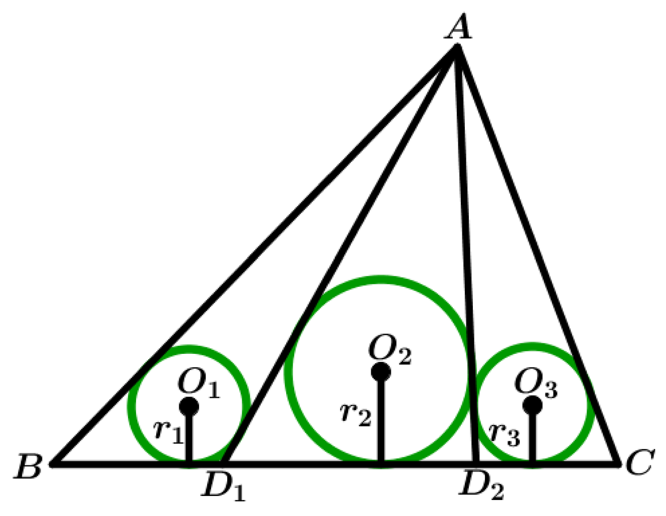


圖 4：3個內切圓的分線

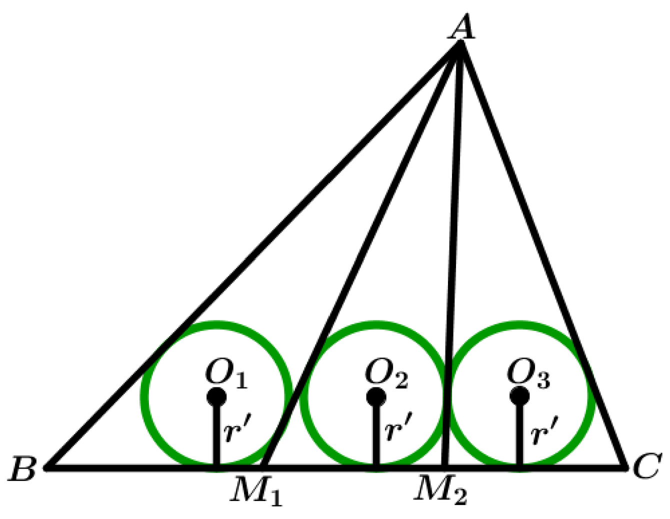


圖 5：3個內切圓的等分線

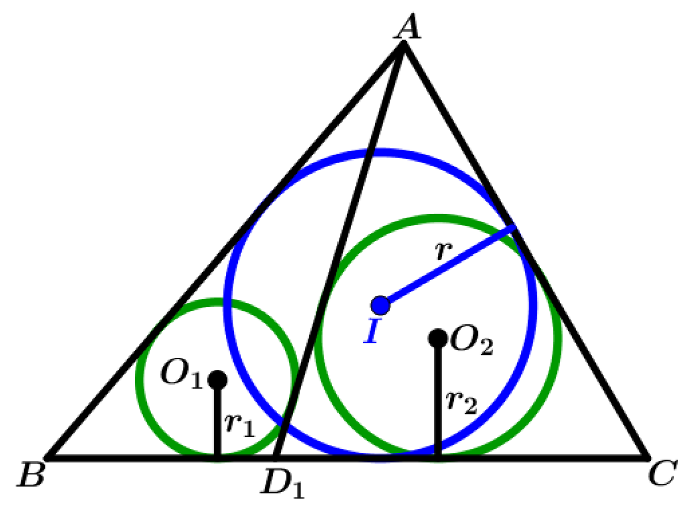


圖 6：2個內切圓的分線

【定義2】(共邊三角形及共邊三角形的內切圓，參考資料[2][3])
給定一個三角形ΔABC，設 $D_1,D_2,\cdots,D_{n-1}$ 在$\overline{BC}$上左而右的$n-1$個的點，則稱此n個三角形 $\Delta ABD_1,\Delta AD_1D_2,\cdots,\Delta AD_{n-1}C$為**共邊三角形**，其中共邊三角形的內切圓圓心及半徑分別為 $O_1,O_2,\cdots,O_n$ 及 $r_1,r_2,\cdots,r_n$，參見圖 4，且$\overline{AD_1},\cdots,\overline{AD_{n-1}}$為**在$\overline{BC}$上$n$個內切圓的分線**，其內切圓的面積分別記作$S_1,S_2,\cdots,S_n$。

注意當$r_1=r_2,\cdots=r_n$時，即n個內切圓的半徑皆相等，此半徑值記作r'，將$\overline{AD_1},\overline{AD_2},\cdots,\overline{AD_{n-1}}$改作$\overline{AM_1},\overline{AM_2},\cdots,\overline{AM_{n-1}}$，稱$\overline{AM_1},\overline{AM_2},\cdots,\overline{AM_{n-1}}$為**在$\overline{BC}$上$n$個內切圓的等分線**，其中**等分線長**分別記作$\overline{AM_1}=\ell_1,\cdots,\overline{AM_{n-1}}=\ell_{n-1}$。

【預備定理 2】(共邊三角形內切圓半徑與高相關性質，參考資料[5]與[6])
在ΔABC中，設h為$\overline{BC}$上的高且D_1為$\overline{BC}$上的一點，若r,r_1,r_2分別為ΔABC、ΔABD_1、ΔAD_1C的內切圓半徑，參見圖 6，則 $r=r_1+r_2-\dfrac{2r_1r_2}{h}$。

二、研究方法或過程

1.探討雙心多邊形中外接圓與內切圓的面積不等式

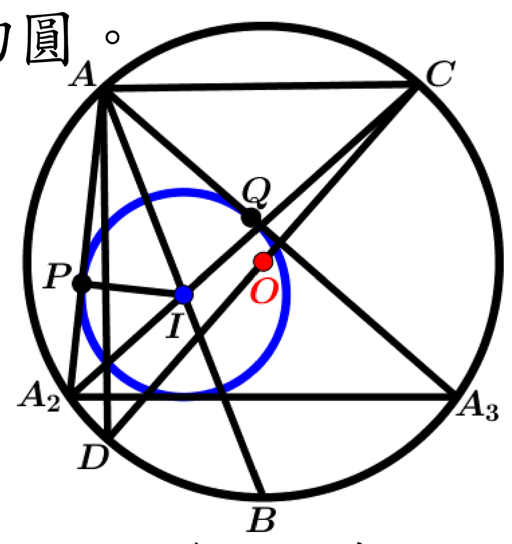
【定理 1】(歐拉不等式及外接圓與內切圓的面積不等式)
在$\Delta A_1A_2A_3$中，(i)**歐拉不等式**：$R\ge 2r$。(ii)$S\ge 4S'$。(iii)**等號成立**此三角形為正三角形，其中 $S=4S'$。

【定理 2】(建構雙心三角形)
設R與r分別為圓Γ_1與圓Γ_2的半徑且滿足$R^2-d^2=2Rr$，則(i)兩圓為**內離**。
(ii)存在**無限多個三角形**是以圓Γ_1為外接圓且以圓Γ_2為內切圓。

【定理 3】(內切圓圓心的軌跡參數式)
(i)**內心為**

$$I\left(\frac{a(a-k)(c+k)}{(\sqrt{a^2-2ak+c^2}+a+c)(\sqrt{c^2-k^2})},\frac{a(a-k)}{\sqrt{a^2-2ak+c^2}+a+c}\right)$$

(ii) **一個類似葉片的封閉曲線**。



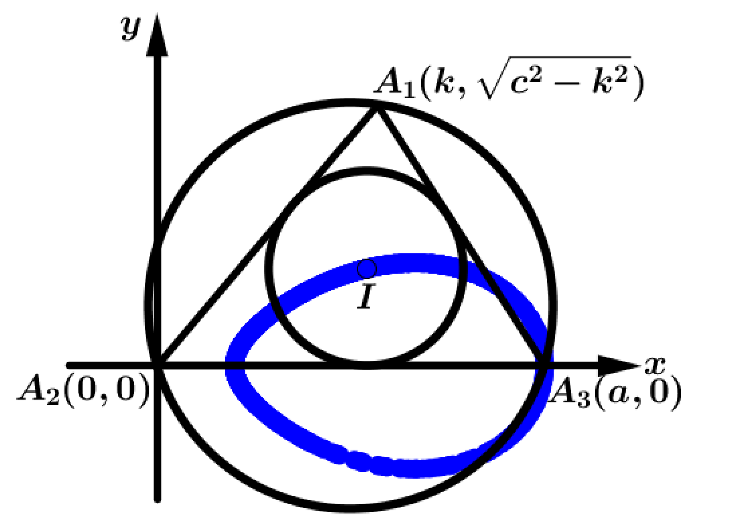


圖7：雙心三角形　圖8：內切圓圓心的軌跡參數式

【定理 4.6】在雙心多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，(i)當多邊形不為正n邊形時，$\overline{A_1I}\times\overline{IB}<2Rr$ 且 $R^2-d^2<2Rr$。
(ii)當多邊形為正n邊形時，$R=\left(\sec\dfrac{\pi}{n}\right)r$。(iii)**多邊形的推廣歐拉不等式**：$R\ge\left(\sec\dfrac{\pi}{n}\right)r$。

【定理 5.7】在雙心多邊形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中，
(i)$S\ge\left(\sec^2\dfrac{\pi}{n}\right)S'$。(ii)**等號成立此多邊形為正 n 邊形**，其中 $S=\left(\sec^2\dfrac{\pi}{n}\right)S'$。

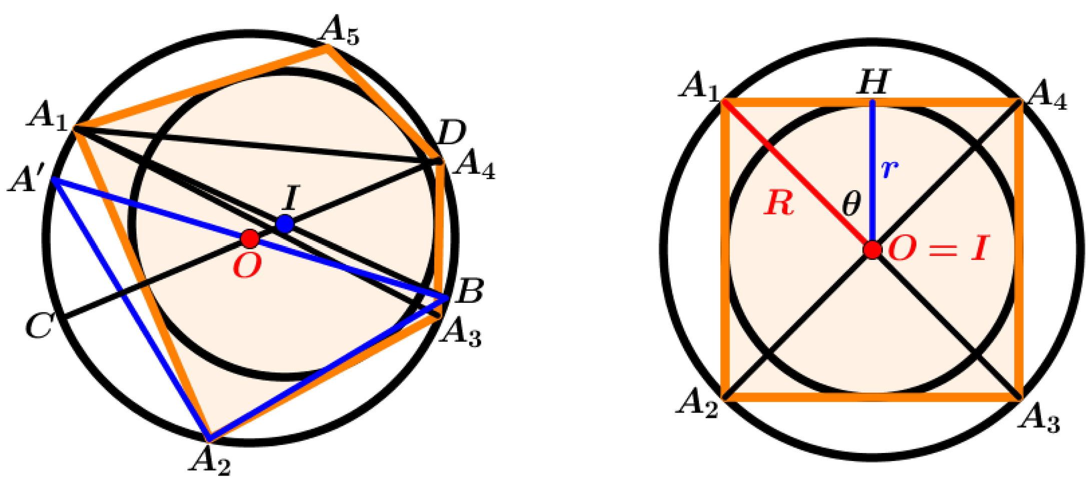


圖9：雙心四邊形

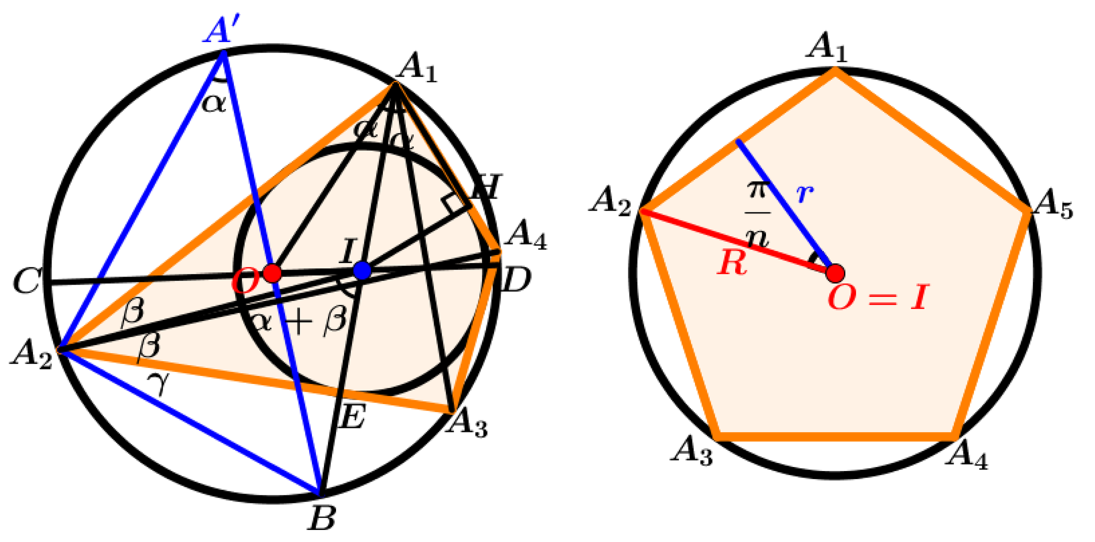


圖10：雙心五邊形

2.探討三角形中共邊三角形的 n 個內切圓

直角三角形

【性質 1及定理 8】(直角三角形的內切圓半徑與高有關性質)

在直角三角形 ΔABC 中，設 $\angle A=90^\circ$ 且 $\overline{AH}=h$ 為 $\overline{BC}$ 上的高，若 r,r_1,r_2 分別為 ΔABC、ΔABH、ΔAHC 的內切圓半徑，則 (i) $r+r_1+r_2=h$。(ii)若 ΔABH 與 ΔAHC 的內切圓面積和等於 ΔABC 的內切圓面積，則 $h=r+\sqrt{r^2+2r_1r_2}$。

(iii)若 ΔABH 與 ΔAHC 的內切圓面積相等，則其兩內切圓面積和為 $\dfrac{r^2+h^2-2hr}{2}\pi$。

【註】(a)**定理8**中(i)，若考慮 ΔABC **不是直角三角形**，則 $r+r_1+r_2<h$，參見圖 11中右圖。

(b)參考資料[5]中證明 $r^2=r_1^2+r_2^2$ 只能存在 $\angle A=90^\circ$ 的情形，即**僅能直角三角形才成立**。

例如：以直角三角形的邊長為 3,4,5 為例，此時內切圓半徑為

$$r=\frac{b+c-a}{2}=\frac{3+4-5}{2}=1$$

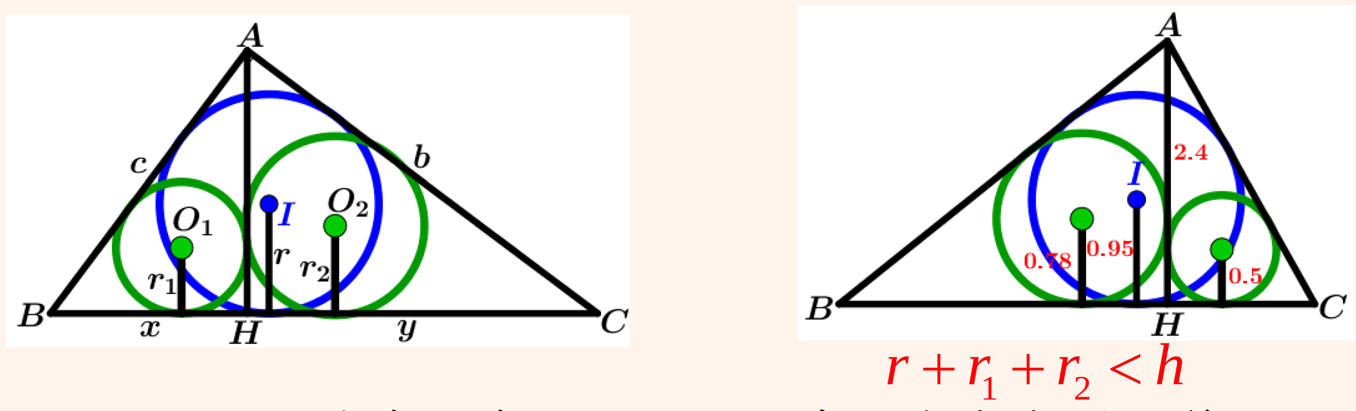


圖11：直角三角形的內切圓半徑與高有關性質

共邊三角形

【性質 2~3】(推廣預備定理 2)

在 ΔABC 中，設 h 為 $\overline{BC}$ 上的高且 $D_1,D_2,\cdots,D_{n-1}$ 為 $\overline{BC}$ 上的 $n-1$ 個點，若 $r,r_1,\cdots,r_n$ 分別為 ΔABC、ΔABD_1、$\cdots$、$\Delta AD_{n-1}C$ 的內切圓半徑，則 $1-\dfrac{2r}{h}=\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{2r_i}{h}\right)$。

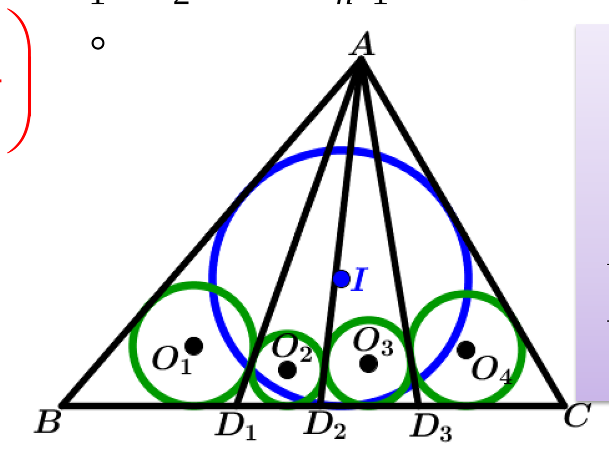


圖12：4個內切圓半徑與高有關性質

【證明】

$$\prod_{i=1}^{4}\left(1-\frac{2r_i}{h}\right)=\left(\tan\frac{B}{2}\tan\theta_1\right)(\cot\theta_1\tan\theta_2)(\cot\theta_2\tan\theta_3)\left(\cot\theta_3\tan\frac{C}{2}\right)=\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}=1-\frac{2r}{h}$$

利用預備定理 2證明共邊三角形中2個內切圓半徑和之最大值及其面積不等式

【定理 9~10】(三角形中共邊三角形內2個內切圓半徑和之最大值及其面積不等式)

在三角形 ΔABC 中，(i)**預備定理 2及配方法**：當 $r_1r_2=\dfrac{h^2-2hr}{4}$ 或 $r_1+r_2=\dfrac{h}{2}$ 時，則 $r_1^2+r_2^2$ **的最小值為** $\dfrac{4hr-h^2}{4}$。

(ii)**預備定理 2及算幾不等式**：當 $r_1=r_2$ 時，其**內切圓半徑和的最大值為** $h-\sqrt{h^2-2rh}$。(iii) $S_1+S_2\ge\left(\dfrac{4hr-h^2}{4}\right)\pi$

利用預備定理 2證明共邊三角形中 n 個內切圓半徑和之最大值及其面積不等式

【定理 11~12】(三角形中共邊三角形內 n 個內切圓半徑和之最大值及其面積不等式)

在三角形 ΔABC 中，(i)**性質 2及算幾不等式**：當 $r_1=r_2=r_3$ 時，其**內切圓半徑和的最大值為** $\dfrac{3h-3\sqrt[3]{h^3-2rh^2}}{2}$。

(ii)**性質 3及算幾不等式**：當 $r_1=r_2=\cdots=r_n$ 時，其**內切圓半徑和的最大值為** $\dfrac{nh-n\sqrt[n]{h^n-2rh^{n-1}}}{2}$。

探討共邊三角形的 n 個內切圓面積和

類型	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	2個內切圓		3個內切圓		$n\ge 4$ 個內切圓	
				最小值	最大值	最小值	最大值	最小值	最大值
I	銳角	銳角	銳角	等圓	近似內切圓	等圓	近似內切圓	等圓	近似內切圓
II	銳角	直角	銳角	等圓	近似內切圓	等圓	近似內切圓	等圓	近似內切圓
III	銳角	鈍角	銳角	無規律	近似內切圓	等圓	近似內切圓	等圓	近似內切圓
IV	直角	銳角	銳角	無規律	等圓	等圓	近似兩個等圓	等圓	近似兩個等圓
V	鈍角	銳角	銳角	無規律	等圓	無規律	近似兩個等圓	等圓	近似兩個等圓

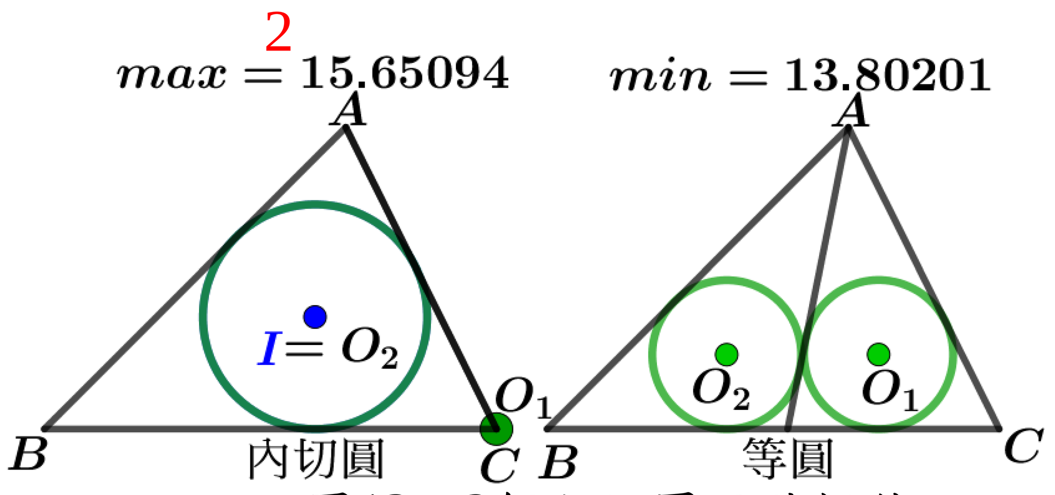


圖13：2個內切圓面積極值

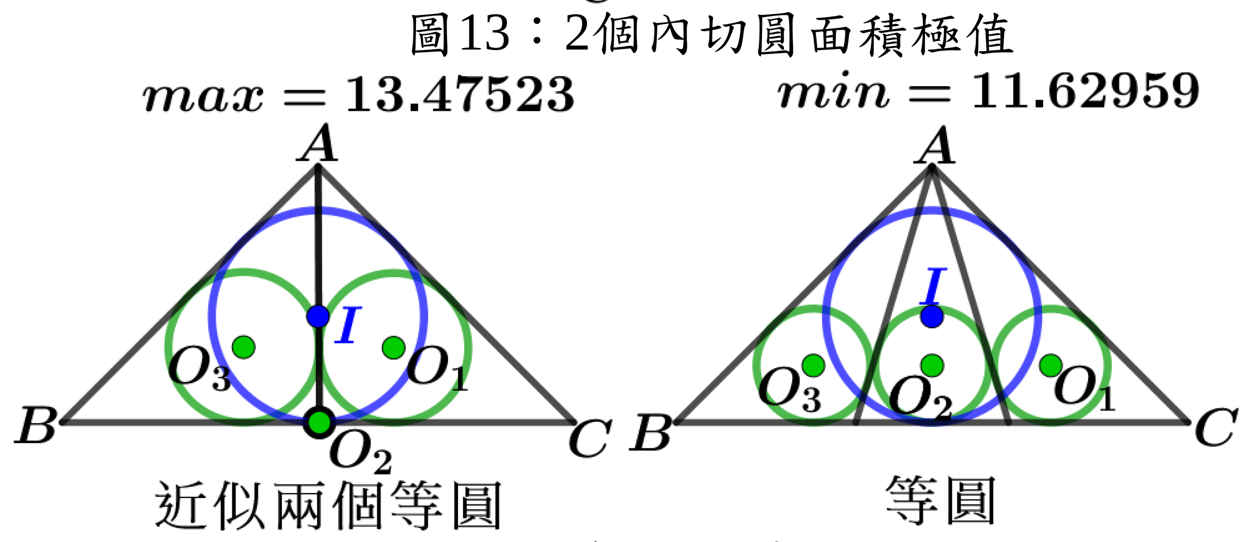


圖14：3個內切圓面積極值

當 $n\ge4$ 個內切圓時，類型I~V中 n 個內切圓面積和的最小值皆發生於等圓情形，而類型I~III中 n 個內切圓面積和的最大值近似於 ΔABC 的內切圓面積。特別類型IV~V 中 n 個內切圓面積和的最大值近似於兩個等圓的內切圓面積。

3.探討共邊三角形的 n 個內切圓等分線

直角三角形

【性質 4】

在直角三角形 ΔABC 中，$s^2=\Delta\left(\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}\right)$，其中 s 為 ΔABC 的周長一半且 Δ 為 ΔABC 的面積。

共邊三角形

【定理 13】(共邊三角形的 2個內切圓之等分線長)

在 ΔABC 中，設在 $\overline{BC}$ 上取一點 M_1 使得 ΔABM_1 與 ΔBM_1C 的內切圓半徑相等，若其內切圓半徑為 r' 且 $\ell_1=\overline{AM_1}$，則 $\ell_1^2=\Delta\cdot\cot\dfrac{A}{2}$，其中 Δ 為 ΔABC 的面積。

例如：若 ΔABC 為正三角形且邊長為 a，則

$$\ell_1^2=\Delta\cdot\cot\frac{A}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cdot\cot\frac{\pi}{6}=\frac{3}{4}a^2$$

即 $\ell_1=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$，此值為高。

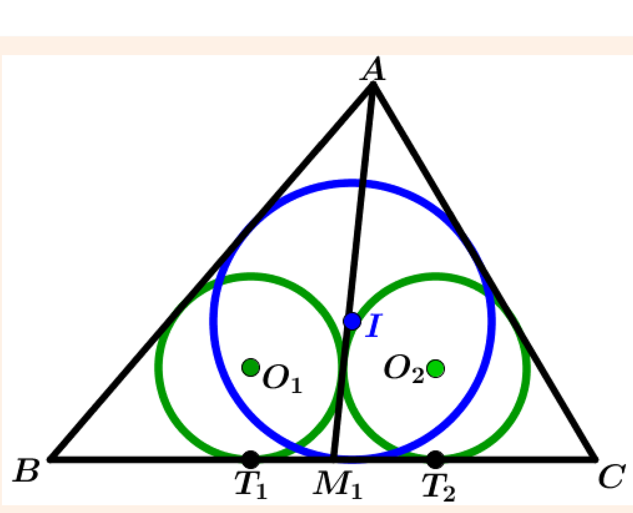


圖15：2個內切圓的等分線長

共邊三角形

【定理 13~15】(共邊三角形的n個內切圓之等分線長)

在ΔABC中，設在$\overline{BC}$上取$n-1$個點 $M_1,\cdots,M_{n-1}$使得 ΔABM_1、ΔAM_1M_2 、⋯、$\Delta AM_{n-1}C$的 $n-1$個內切圓半徑相等，若其半徑為r'且 $\ell_i=\overline{AM_i}\ (1\le i\le n-1)$，則

$$\Delta\left(\cot\frac{A}{2}-\sum_{k=1}^{n-2}\cot\theta_i^{(k)}\right)=s^2-(s+\sum_{i=1}^{n-1}\ell_i)(s-\ell_i)$$

，其中 $\theta_i^{(k)}$ 為 ℓ_i邊對應在ΔAM_iM_j中的所有對角，且 $1\le i,j\le n-1, i\ne j, k=n-2$。

當$n=3$時，要求ℓ_1時，取$\theta_1=\frac{1}{2}\angle AM_2M_1$，即 ℓ_1**邊對應在 ΔAM_1M_2 中的對角**。

同樣地，要求 ℓ_2時，取 $\theta_2=\frac{1}{2}\angle AM_1M_2$，即 ℓ_2**邊對應在 ΔAM_1M_2 中的對角**。

為了方便推廣，**定義** $\theta_1=\frac{1}{2}\angle AM_2M_1\underset{記作}{=}\theta_1^{(1)},\ \theta_2=\frac{1}{2}\angle AM_1M_2\underset{記作}{=}\theta_2^{(1)}$

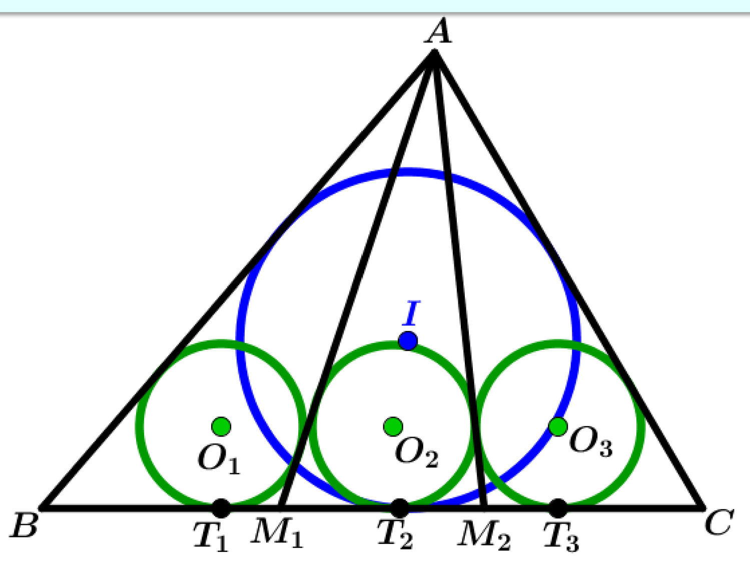


圖16：3個內切圓的等分線長

例如：若ΔABC為正三角形且邊長為a，則 $\ell_1=\ell_2$

$$\Delta\left(\cot\frac{60^\circ}{2}-\sum_{k=1}^{3-2}\cot\theta_i^{(k)}\right)=s^2-(s+\sum_{i=1}^{3-1}\ell_i)(s-\ell_i)$$

得到 $2\ell_1^2-\frac{3}{2}a\ell_1+\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\left(\sqrt{3}-\cot\theta_1\right)=0$，所以 $\ell_1=\ell_2=\frac{\left(3+\sqrt{33-8\sqrt{3}\cot\theta_1}\right)a}{8}$

4.探討共邊三角形中內切圓圓心

【定理 16~18】(共邊三角形的 n 個內切圓圓心落在三角形的內切圓上)

在ΔABC中，(i) $\overline{IO_1}=(r-r_1)\csc\frac{B}{2}$ 且$\overline{IO_n}=(r-r_2)\csc\frac{C}{2}$，其中 $\csc\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{ac}{(s-a)(s-c)}}$ 。

(ii)若圓心 O_1 或圓心O_n落在ΔABC的內切圓上，

則 $r-r_1-r\sin\frac{B}{2}=0$ 或 $r-r_n-r\sin\frac{C}{2}=0$ 。

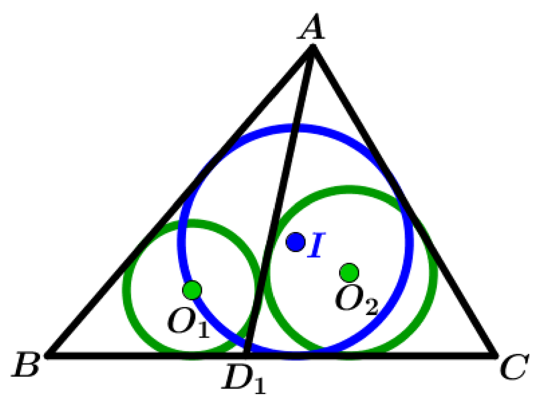


圖17：2個內切圓中的內切圓圓心

(iii)當$n=2$時，**圓心 O_1與圓心 O_2不會同時落在ΔABC的內切圓上**。

當$n\ge 3$時，圓心O_1與圓心O_n同時落在ΔABC的內切圓上，$r_1:r_n=\left(1-\sin\frac{B}{2}\right):\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)$ 且$\overline{O_1O_n}=\sqrt{2r^2\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}$

【定理 19】(共邊三角形的 n 個內切圓圓心落在三角形的內切圓上)

在ΔABC中，若圓心 $O_1,O_2,\cdots,O_n$同時落在ΔABC的內切圓上之圓心個數為N，則$1\le N\le n-1$。

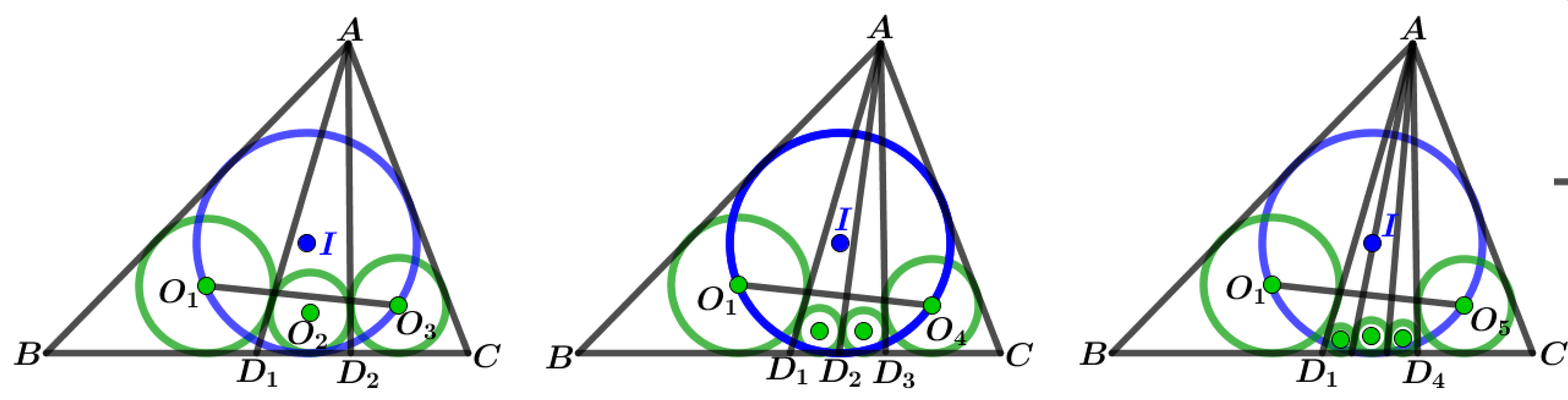


圖18： $\overline{O_1O_n}$ 相等

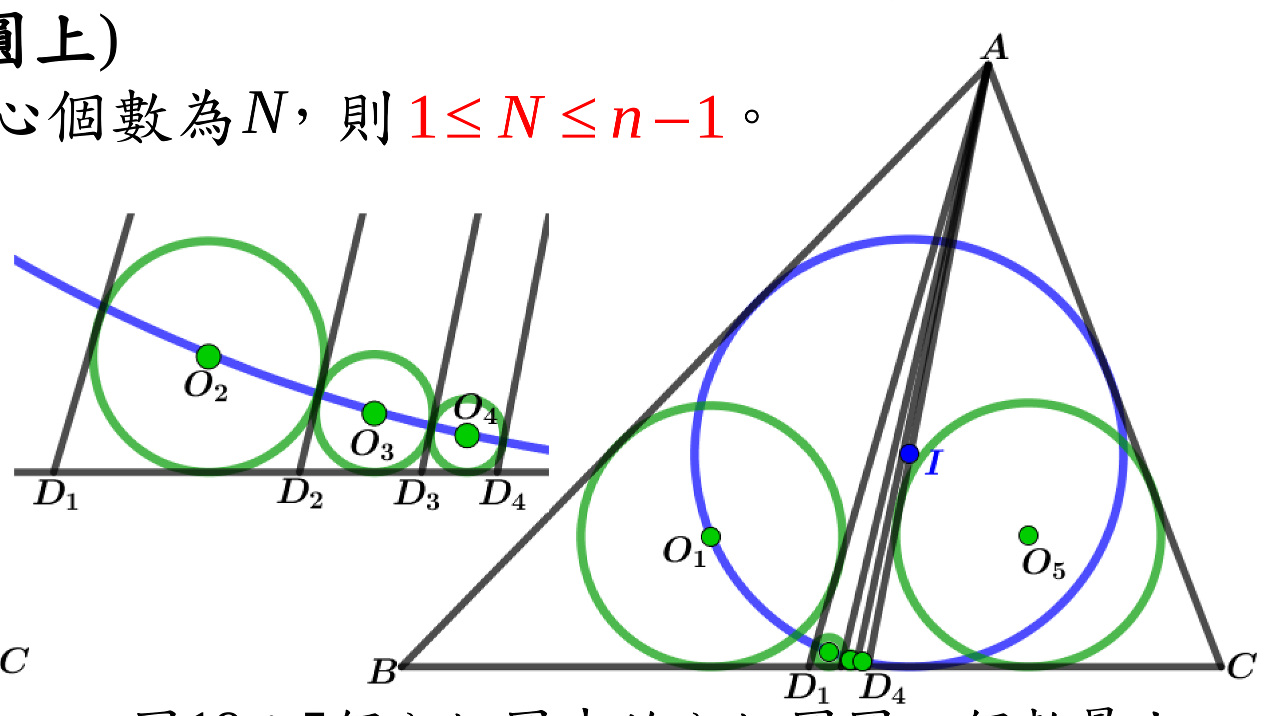
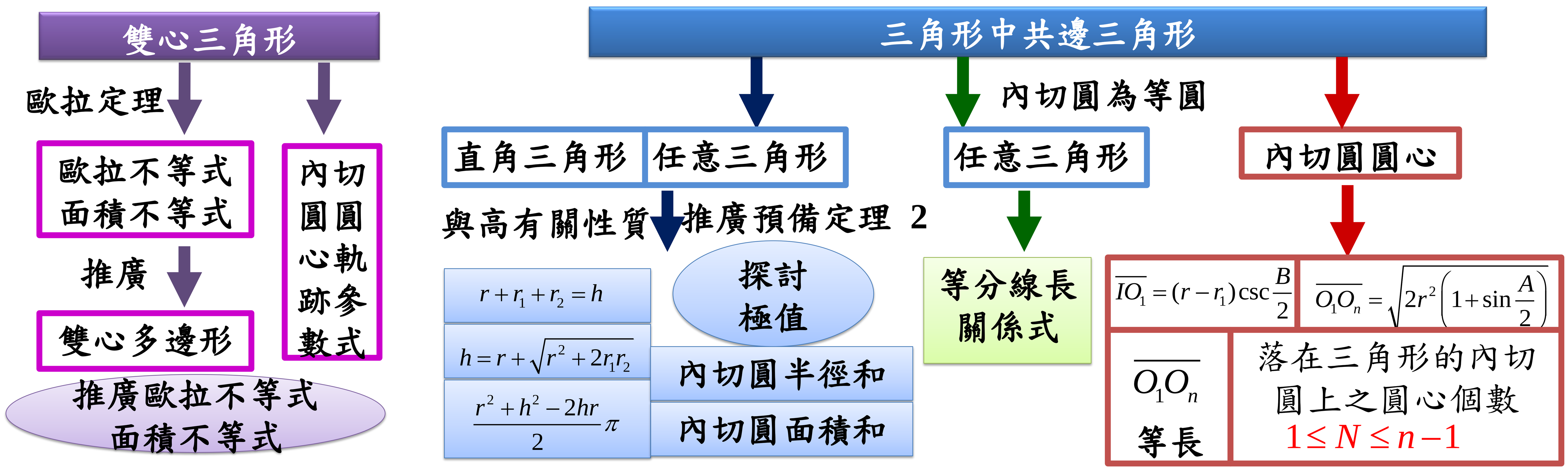


圖19：5個內切圓中的內切圓圓心個數最大

三、研究結果



四、結論與未來展望

1.結論

(i)從歐拉定理的證明中推廣歐拉不等式，進而推導出雙心多邊形中外接圓及內切圓之面積不等式。(ii)探討在三角形中共邊三角形的n個內切圓之幾何性質，推導出內切圓半徑和及面積和的極值，其值特別與高有關。 (iii) 探討內切圓等分線長，得到其關係式。 (iv)探討共邊三角形的 n 個內切圓與原三角形內切圓關聯性質，如其圓心何時落在原三角形的內切圓上及在其上的圓心個數之極值。

2.未來展望

(i)繼續探索歐拉定理的延伸性質。 (ii)探討推廣預備定理 2的幾何性質。 (iii)簡化內切圓等分線長的關係式。 (iv)探討n個內切圓的面積極值。此外，每個定理完備性及證明的嚴謹度，是未來努力突破的。

五、參考資料

[1]沈康身 (2011)。**歷史數學名題賞析03**。新北市：稻田出版社。

[2]莊健祥 (2011)。有關三角形內切圓等分線的一些不等式。**數學傳播**，**35**(4)，82-85。

[3]陳俐安、陳品璇 (2011)。共邊三角形的內切圓。第五十一屆全國中小學科展高中組數學科作品。

[4]黃家禮 (1997)。**幾何明珠**。台北市：九章出版社。

[5]鄒黎明 (2015)。一組平面幾何公式的思考。**數學傳播**，**39**(4)，93-96。

[6]鄒黎明 (2016)。涉及三個內切圓的一個有趣結論。**數學傳播**，**40**(1)，87-90。

[7] Mirko Radić (2006). *On A System Of Equations Related To Bicentric Polygons*. Journal of Geometry.**91**, pp 119–139,2009.