摘要

本研究在探討過原點且通過特定格子區域中格子點的直線數，利用縱向或橫向方式來計算圓形、任意三角形、超立方體 、超長方體 、k－單體及k－角錐柱中的直線數，得到其格子直線數是利用推廣歐拉函數或史特林數來表示。特別是在橫向方式中增加上高斯與高斯符號協助計算，得到其直線數及其上下界，有趣地獲得的公式更為精簡。此外，將原點移動到任意點，探討過任意點且通過特定格子區域中格子點的直線數，也得到一些有趣的性質。

研究目的及問題

探討過原點且通過特定格子區域中格子點的直線數

【定義5】設 $\varphi_1(n)$ 表示為不大於n且與n互質之正整數個數。若正整數n的標準分解式為 $n=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdots p_m^{\alpha_m}$ 其中 $p_1,p_2,\ldots,p_m$ 為相異質數，且 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_m\in N$，則 $\varphi_1(n)=n(1-\frac{1}{p_1})(1-\frac{1}{p_2})\cdots(1-\frac{1}{p_m})$

此函數叫做**歐拉函數 (Euler's totient function)** 。例如： $\varphi_1(1)=1,\varphi_1(2)=1,\varphi_1(3)=2,\varphi_1(4)=2,\varphi_1(5)=4$

【定義6】(推廣歐拉函數(Jordan‘s totient function)、約當囿互質函數，參考文獻[3] [4])

推廣一式 $\varphi_k(n)=n^k(1-\frac{1}{p_1^k})(1-\frac{1}{p_2^k})\cdots(1-\frac{1}{p_m^k})$

縱向方式來計算格子直線數

推廣歐拉函數的幾何觀點

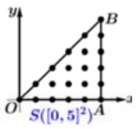

圖1

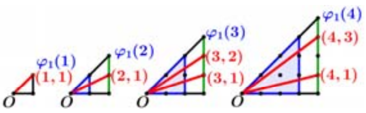

圖2： 在$S([0,n]^2)$而不在$S([0,n-1]^2)$ 為新增格子直線對應歐拉函數

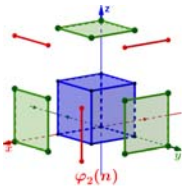

圖3

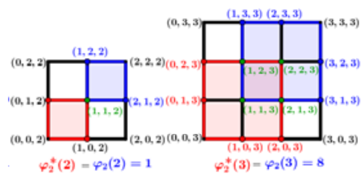

圖4

【預備定理 1】

$\varphi_k(n)$為 $[1,n]^k$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,\cdots,x_k,n)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 的個數

$\varphi_k^*(n)$為 $[0,n-1]^k$ 中滿足 $\gcd(x_1,x_2,\cdots,x_k,n)=1$ 的格子點 $(x_1,x_2,\cdots,x_k)$ 的個數

推廣二式 $\varphi_k^*(n)=\varphi_k(n)$

【預備定理 4】 $b_3(n)=7+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=2}^{n}C_j^3\varphi_j^*(i),\ b_k(n)=\left(2^k-1\right)+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=2}^{n}C_j^k\varphi_j^*(i)$ 其中 $\varphi_k(1)=1$ 及 $\varphi_0^*(n)=\begin{cases}1, & 當\ n=1\\ 0, & 當\ n\neq 1\end{cases}$。

【預備定理 3】 **推廣三式**

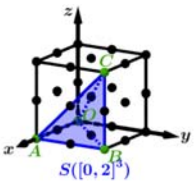

圖5

$$\varphi_k^*(n)=\sum_{j=0}^{k}S(k+1,j+1)\cdot j!\cdot a_j'(n)$$

$$0<x_k<x_{k-1}<\cdots<x_1<n$$

$$\gcd(x_1,x_2,\cdots,x_k,n)=1$$

$S(n,m)$

$n\backslash m$	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	1	1		
3	0	1	3	1	
4	0	1	7	6	1

第二類史特林數

$s(n,m)$

$n\backslash m$	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	−1	1		
3	0	2	−3	1	
4	0	−6	11	−6	1

第一類史特林數

1.利用歐拉函數推廣三式還可以呈現哪些特定格子圖形呢?
2.除了利用縱向方式來計算格子直線數，還有其他的方式來計算嗎？
3.是否可計算凹邊形或凹多面體等等圖形中的格子直線數呢？

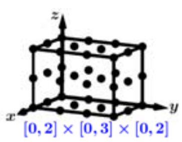

圖6:格子長方體

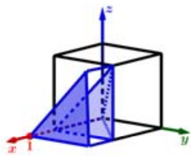

圖7:格子3－角錐柱

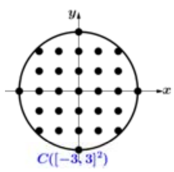

圖8:格子圓形

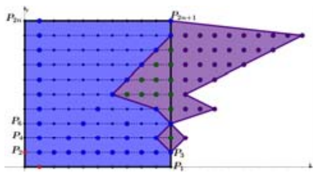

圖9:格子凹邊形

研究方法或過程

利用縱向方式探討平面區域的格子直線數

格子正方形 $[0,n]^2$ $\xrightarrow{推廣}$ **格子超立方體** $[0,n]^k$ $\xrightarrow{推廣}$ **格子超長方體** $[0,n_1]\times\cdots\times[0,n_k]$

【定理 1】(計算格子長方形的格子直線數 $b_2(n_1,n_2),n_1>n_2$)

$$b_2(n_1,n_2)=\begin{cases}1+2\sum_{i=1}^{n_2}\varphi_1(i)+\varphi_1(n_1) & ,其中\ n_1=n_2+1\\ 1+2\sum_{i=1}^{n_2}\varphi_1(i)+\varphi_1(n_2+1)+\varphi_1(n_1)-\left|\{m\mid n_2<m<n_1,\gcd(m,n_1)=1\}\right| & ,其中\ n_1=n_2+2\end{cases}$$

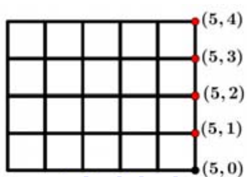

圖10:$[0,5]\times[0,4]$

$d_2(5,4)=a_2(4)+\varphi_1(5)$

【定理 2】(計算格子超長方體的格子直線數 $b_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)$)

設 $b_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)$ 為格子超長方體 $[0,n_1]\times[0,n_2]\times\cdots\times[0,n_k]$ 中的格子直線數，

當$n_1=n_2+1,\ n_2=n_3=\cdots=n_k$時，則 $b_k(n_1,n_2,\cdots,n_k)=\left(2^k-1\right)+\sum_{j=1}^{k-1}\sum_{i=2}^{n_2}C_j^k\varphi_j^*(i)+\varphi_{k-1}(n_1)$, 其中$n_1=n_2+1$。

利用縱向方式來計算 $k-$ 單體的格子直線數

【定理 3】

(i) $a_1(n)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_0^*(i)$ (ii) $a_2(n)=\sum_{i=1}^{n}\left(\varphi_0^*(i)+\varphi_1^*(i)\right)=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(i)$ (iii) $a_3(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{j}C_j^3\frac{s(j,m)}{(j-1)!}\varphi_{m-1}^*(i)$，其中 $s(n,m)$ 為第一類史特林數。

【定理 4】 $a_k(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{j}\frac{C_j^k s(j,m)}{(j-1)!}\varphi_{m-1}^*(i)$

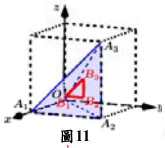
圖11

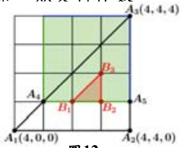
圖12

分成三類 $0\le x_1\le x_2\le x_3\le n$

$0<x_3<x_2<x_1=n(\Delta A_1A_2A_3內點)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{3}\frac{C_3^3 s(3,m)\varphi_{m-1}^*(i)}{2!}$

$0<x_3<x_2=x_1=n(一個等號)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{2}\frac{C_2^3 s(2,m)\varphi_{m-1}^*(i)}{1!}$

$0<x_3=x_2=x_1=n(二個等號)\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{1}\frac{C_1^3 s(1,m)\varphi_{m-1}^*(i)}{0!}$

分成 $S(k+1,j+1)$ 類

$j=0:0=x_{(2)}=x_{(1)}<n\Rightarrow(x_{(1)},x_{(2)})$有$a_0'(3)$個$\Rightarrow S(3,1)\cdot0!\cdot a_0'(3)$

$j=1:0<x_{(1)}=x_{(2)},0=x_{(1)}<x_{(2)},0<x_{(2)}<x_{(1)}\Rightarrow(x_{(1)},x_{(2)})$各有$a_1'(3)$個$\Rightarrow S(3,2)\cdot1!\cdot a_1'(3)$

$j=2:0<x_{(1)}<x_{(2)}\Rightarrow(x_{(1)},x_{(2)})$有$a_2'(3)$個，但考慮排列$\Rightarrow S(3,3)\cdot2!\cdot a_2'(3)$

由加法原理得 $\varphi_2^*(3)=\sum_{j=0}^{2}S(3,j+1)\cdot j!\cdot a_j'(3)=8$ $\varphi_k^*(n)=\sum_{j=0}^{k}S(k+1,j+1)\cdot j!\cdot a_j'(n)\Leftrightarrow a_k'(n)=\sum_{m=1}^{k}\frac{s(k,m)\varphi_{m-1}^*(n)}{(k-1)!}$

探討 $k-$ 角錐柱的格子直線數 $c_k(n+1)$ $k-$單體 → $k-$角錐柱

【定理 5】

(i)當 $k=2$ 時，則 $d_2(n+1)=1+\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(i)+\varphi_1(n+1)$。

(ii) 當 $k=3$ 時，則 $d_3(n+1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{j}C_j^3\frac{s(j,m)}{(j-1)!}\varphi_{m-1}^*(i)+\frac{\varphi_2(n+1)+\varphi_1(n+1)}{2}$

(iii) 當 $k=4$ 且 $n+1$ 為質數時，則 $d_4(n+1)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{4}\sum_{m=1}^{j}C_j^4\frac{s(j,m)}{(j-1)!}\varphi_{m-1}^*(i)+\sum_{i=2}^{n+1}\frac{i(i+1)}{2}$

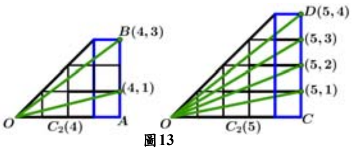

圖13

(iv) 當 $k\ge5$ 且 $n+1$為質數時，若 $d_k^*(n+1)$為在角錐柱 $C_{[0,n+1]}^k$中而不在 $C_{[0,n]}^k$ 的新增格子直線數，則

$$d_k(n+1)=d_k(n)+(k-4)n+\sum_{i=2}^{n+1}d_{k-1}^*(i)$$

利用橫向方式探討平面區域的格子直線數

計算方式	格子正方形及其凹多邊形 推廣→ 格子長方形及其凹多邊形 推廣→ 格子三角形及其凹多邊形
$\varphi_1(n)$ [ ] ⌈ ⌉	設 $b_2(n)$為在 $[0,n]^2$中的凹多邊形之格子直線數，則 $b_2(n)=2+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]\cdot\varphi_1(i)$，其中[ ]為高斯符號。(定理 6) 設 $b_2(n)$為在$[0,n]^2$中的格子直線數，則 (定理 7) (i) $b_2(n)\le2+\sum_{i=1}^{n}\left\lceil\frac{n}{i}\right\rceil\cdot\varphi_1(i)$ (ii) $b_2(n)=2+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]\cdot\varphi_1(i)+\sum_{1\le i\le n}\left\|\{m\mid i<m<n,\gcd(m,i)=1,1\le i\le n\}\right\|$。
$\varphi_1(n)$ [ ] ⌈ ⌉	設 $b_2(n_1,n_2)$為在 $[0,n_1]\times[0,n_2]$中的凹多邊形之格子直線數，則 $b_2(n_1,n_2)=2+\sum_{i=1}^{n_2}\left[\frac{n_1}{i}\right]\cdot\varphi_1(i)$。(定理 8) 設 $b_2(n_1,n_2)$ 為在 $[0,n_1]\times[0,n_2]$中的格子直線數，則 (定理 9) (i) $b_2(n_1,n_2)\le2+\sum_{i=1}^{n_2}\left\lceil\frac{n_1}{i}\right\rceil\cdot\varphi_1(i)$ (ii) $b_2(n_1,n_2)=2+\sum_{i=1}^{n_2}\left[\frac{n_1}{i}\right]\cdot\varphi_1(i)+\sum_{1<i<n_2}\left\|\{m\mid n_2<m<n_1,\gcd(m,i)=1,1\le i\le n_1\}\right\|$
$\varphi_1(n)$ [ ] ⌈ ⌉	設 $a_2(n)$ 為在 $S([0,n]^2)$中的凹多邊形之格子直線數，則 $a_2(n)=2+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-i}{i}\right]\cdot\varphi_1(i)$。(定理 10) 設 $a_2(n)$ 為在$S([0,n]^2)$中的格子直線數，則 (定理 11) (i) $a_2(n)\le2+\sum_{i=1}^{n}\left\lceil\frac{n-i}{i}\right\rceil\cdot\varphi_1(i)$ (ii) $a_2(n)=2+\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n-i}{i}\right]\cdot\varphi_1(i)+\sum_{1<i\le n}\left\|\{m\mid i<m<n,\gcd(m,i)=1,1\le i\le n\}\right\|$ 推廣至任意三角形及其凹多邊形 $a_2(n_1,n_2)\le a_2(n_1,n_2)\le2+\sum_{i=1}^{n_2}\left[\frac{n_1-n_1i/n_2}{i}\right]\cdot\varphi_1(i)a$ (定理 12)

等分原則

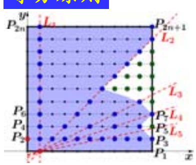
圖14

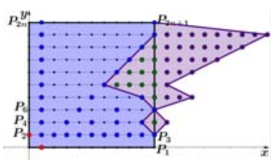
圖15

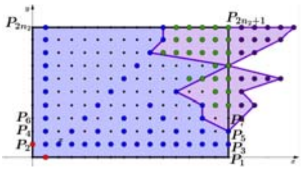
圖16

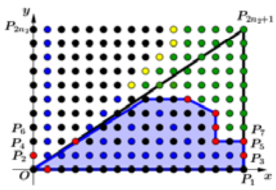
圖17

探討超立方體及超長方體的格子直線數

等分原則

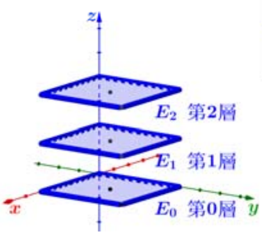

圖18

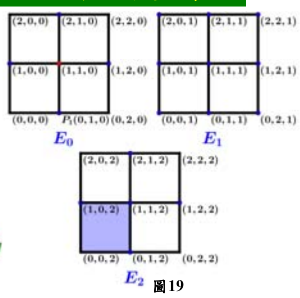

圖19

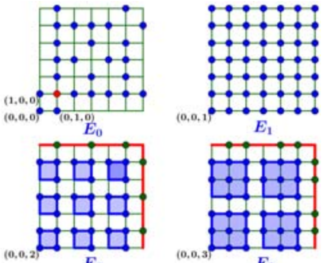

圖20

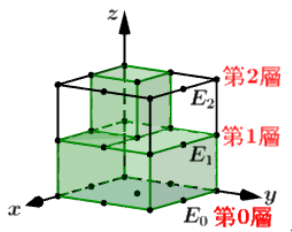

圖21

【定理 14.16】設 $b_k(n)$為在 $[0,n]^k$中的凹多面體之格子直線數，則(i) $b_3(n)=1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(i)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{i}\right]^2\varphi_2^*(i)$

(ii) $b_3(n)=1+2\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(i)+\sum_{i=1}^{\infty}\left\lceil\frac{n+1}{i}\right\rceil^2\varphi_2^*(i)+2\sum_{1<i<n}\left\|\{m\mid i<m<n,\gcd(m,n)=1,1\le i\le n\}\right\|$ (iii) $b_k(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{m=1}^{j}\frac{C_j^k s(j,m)}{(j-1)!}\varphi_{m-1}^*(i)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n+1}{i}\right]^{k-1}\varphi_{k-1}^*(i)$

推廣至超長方體及其凹多面體【定理 15.17】

$$b_3(n_1,n_2,n_3)=1+2\sum_{i=1}^{n_2}\varphi_1(i)+\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{n_1+1}{i}\right]\left[\frac{n_2+1}{i}\right]\varphi_2^*(i)$$

探討圓形的格子直線數 $C([-n,n])$ 2－單體 → 圓形

【定理 13】 $\underline{C}_k(-n,n)=2+4\sum_{i=1}^{n}\varphi_1(i)-4\sum_{i=n_1}^{n}\left[\varphi_1(i)\cdot\frac{n(i-n_1)}{i(n-n_1)}\right]-4\varphi_1(n)-2$

令紅色的1/4圓形區域內的最大正方形的邊長為 n_1，則

$2\{[0,n]^2$ 的格子直線數 $-\Delta ABP,\Delta BCP$ 的格子直線數$\}-2(\overleftrightarrow{OA},\overleftrightarrow{OC})$

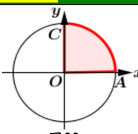

圖22

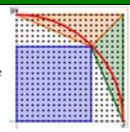
圖23

利用橫向方式來計算超立方體、超長方體及 單體的格子直線數

【性質 2】在 $[0,n]^3$ 中六個三角錐 $O-A_1A_2A_6$、$O-A_4A_5A_6$、…的格子直線數是相同的。

【定理 18】 $a_3(n)=3+\sum_{i=2}^{n}\frac{\varphi_2^*(i)+3\varphi_1(i)}{2}$

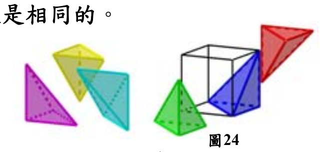
圖24

【定理 19】

(i) $\underline{a}_4(n)=4+3(n-1)+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{j}\frac{\varphi_2^*(i)+3\varphi_1(i)}{2}$

(ii) $a_4(n)=4+3(n-1)+\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=2}^{j}\frac{\varphi_2^*(i)+3\varphi_1(i)}{2}+\left|\{(x_1,x_2,x_3,x_4)\mid\gcd(x_2,x_3)\neq1,\gcd(x_1,x_2,x_3,x_4)=1,0\le x_1,x_2,x_3\le n-1,x_4=n\}\right|$ $(x_1,x_2,x_3)\Rightarrow(x_3,x_2,x_1)$

【定理 20】 $\underline{a}_k(n)=\sum_{i=1}^{n}(k-2)i+\sum_{i_{k-2}}^{n}\cdots\sum_{i_2=2}^{i_3}\sum_{i_1=2}^{i_2}\frac{\varphi_2^*(i_1)+3\varphi_1(i_1)}{2}$

等分原則

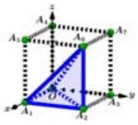
圖25

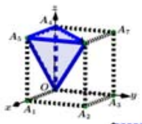
圖26

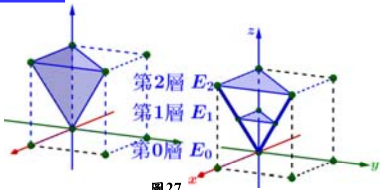

圖27

$\frac{\varphi_2^*(2)-\varphi_1(2)}{2}+\varphi_1(2)+\varphi_1(2)$

$=\frac{\varphi_2^*(2)+3\varphi_1(2)}{2}$

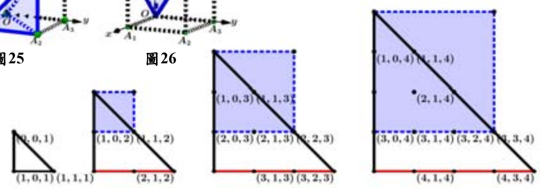

圖28

$E_1:0\le x_3\le x_2\le x_1\le x_4=1\Rightarrow 4$

$E_2:0\le x_3\le x_2\le x_1\le x_4=2\Rightarrow \underbrace{4}_{\text{第1層}}+\underbrace{3+\frac{\varphi_2^*(2)+3\varphi_1(2)}{2}}_{\text{第2層}}$

探討過任意點的格子直線數 格子正方形

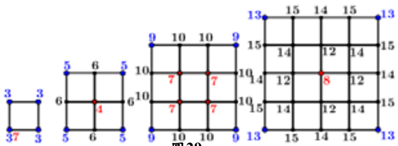
圖29

過原點的格子直線數為所有情形的中位數附近值

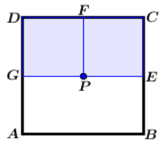

圖30

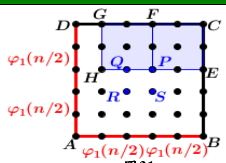

圖31

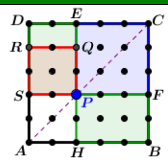

圖32

【定理 22】

(i)當 n 為偶數，則過中間點 P 的格子直線數為 $b_2^*(n)=4\sum_{i=1}^{[n/2]}\varphi_1(i)$

(ii)當 n 為奇數，則過中間單位正方形四點的格子直線數為 $b_2^*(n)=4\sum_{i=1}^{[n/2]}\varphi_1(i)+4\varphi_1([n/2])$

(iii)若點 P 為對角線上的一點且過 P 點最大正方形的邊長為 n_1，則過點 P 的格子直線數為

$$\underline{b}_2^*(n)=1+2\sum_{i=1}^{n_1}\varphi_1(i)+2\sum_{i=1}^{n-n_1}[n_1/i]\varphi_1(i)-2-\left(1+2\sum_{i=1}^{n-n_1}\varphi_1(i)-2\right)$$

$[0,n]^2$ 的格子直線數 $+(\square BFPH,\square PEDS)$ 的格子直線數 $-2(\overleftrightarrow{SF},\overleftrightarrow{EH})-[0,n-n_1]^2$ 的格子直線數

結論與應用

特定格子區域的格子直線數

幾何觀點 歐拉函數推廣三式來呈現 $\varphi_k^*(n)=\varphi_k(n)$, $\varphi_k^*(n)=\sum_{j=0}^{k}S(k+1,j+1)\cdot j!\cdot a_j'(n)$

縱向方式

$\varphi_1(n)$：格子正方形、格子長方形

$\varphi_k^*(n)$：格子超立方體

$\varphi_k^*(n),\varphi_k(n)$：格子超長方體；格子2－單體

$\varphi_k^*(n)=\sum_{j=0}^{k}S(k+1,j+1)\cdot j!\cdot a_j'(n)$：格子 k－單體 $k\ge3$

$\varphi_k^*(n)=\sum_{j=0}^{k}S(k+1,j+1)\cdot j!\cdot a_j'(n)$：格子 k－角錐柱

橫向方式

$\varphi_1(n),[\ ],\lceil\ \rceil$：格子正方形及凹邊形、格子長方形及凹邊形、格子2－單體及凹邊形、格子圓形及凹邊形

$\varphi_k(n),\varphi_k^*(n),[\ ],\lceil\ \rceil$：格子立方體及凹多面體、格子長方體及凹多面體

$\varphi_k(n),\varphi_k^*(n)$：格子3－單體、格子 k－單體及凹多面體

$\varphi_k^*(n),[\ ],\lceil\ \rceil$，$\varphi_k^*(n)=\sum_{j=0}^{k}S(k+1,j+1)\cdot j!\cdot a_j'(n)$：格子超立方體及凹多面體、格子超長方體及凹多面體

縱向方式	格子正方形, 超長方體 $(n_1=n_2+1)$, 超立方體, k－單體, k－角錐柱
橫向方式	格子正方形中凹邊形, 超長方體及超立方體中凹多面體, k－單體及角錐柱
縱向+橫向	$\varphi_1(n),[\ ]$ 格子正方形：過任意點特定格子區域的格子直線數, 格子圓形, 超長方體, 超立方體

參考文獻

橫向方式較縱向方式簡潔

3－單體 $a_3(n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3}\sum_{m=1}^{j}C_j^3\frac{s(j,m)}{(j-1)!}\varphi_{m-1}^*(i)$，$a_3(n)=3+\sum_{i=2}^{n}\frac{\varphi_2^*(i)+3\varphi_1(i)}{2}$

[1] 范谷瑜(2014)。格子直線數與歐拉函數之探討與推廣。2017年臺灣國際科學展覽會高中組數學科。

[2]博羅夫斯基、博溫 (2004)。數學辭典。香港以及馬新：貓頭鷹出版。

[3] Dickson, L. (1966). *History of the theory of numbers*. I, Chelsea Publishing Co.：New York.

[4] M. Ram Murty (2001). *Problems in Analytic Number Theory*. Graduate Texts in Mathematices. 206. Springer-Verlag. P.11.