一、前言

1.研究動機

費氏數列中每一項除以任意正整數後所得的餘數數列具有許多有趣的性質，例如：**所有餘數數列均有週期性及每個週期循環列皆是由0均勻分割**，即數列在固定間隔某幾項後可被正整數整除，由此性質就可進一步計算週期長度。

本作品中我們嘗試將費氏數列中的餘數數列性質推廣到**一般高階正整係數齊次線性遞迴數列**(內文簡稱**高階線性遞迴數列**)的情形。我們發現除了**所有餘數數列均為(前)週期數列**外，**每個週期循環列中的均勻分割的情形變化出二種**：**由數個0均勻分割(含某項後均為0)**、**數個不全為0均勻分割(含某項後皆為不為0的常數)**，進一步則探討上述二種中的**區分週期循環列之條件**。最後探討出數列的**因倍數定理**。

2.研究目的

一、探討高階線性遞迴數列中每一項除以任意正整數後所得餘數數列，證明餘數數列均為**(前)週期數列**。

二、探討高階線性遞迴數列中係數在何種條件下，其餘數數列中每個週期循環列會**有數個0均勻分割(含在某項後皆為0)，探討出區分條件。**

三、探討高階線性遞迴數列中係數在何種條件下，其餘數數列中每個週期循環列會**有數個不全為0均勻分割(含在某項後皆為不為0的常數)，深入探討出區分條件。**

四、探討利用餘數數列性質推導出**高階線性遞迴數列的因倍數性質**。

3.定義與預備定理

【**定義1**】(**k階正整係數齊次線性遞迴數列**，張福春、莊淨惠[1] [2])

給定一數列$\{a_n^k\}$，若存在$k(\geq 2)$個正整數$c_1,c_2,\cdots,c_k$，滿足兩條件

(i) (**初始條件**) $a_1=1, a_i=0,$ 其中$-(k-2)\leq i\leq 0$。

(ii) (**遞迴關係**) $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+c_3a_{n-3}+\cdots+c_{k-1}a_{n-k+1}+c_ka_{n-k},\ n\geq 2$

則滿足(i)與(ii)式的數列$\{a_n^k\}$，稱為k **階正整係數齊次線性遞迴數列**，內文簡稱k **階線性遞迴數列**。

其次，稱k階線性遞迴數列中每一項除以正整數m後所得的餘數數列為 k **階餘數數列**$\{r_n^k\}$。

計算週期長度 定義**k階餘數數列的週期長度**，記作$\pi_k(m)$。

研究方法：每個週期循環列中會有$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$或$x_1,\cdots,x_{k-1}$**均勻分割情形，其均勻分割長度**記作為$\ell_k(m)$，即存在正整數$s$使得$\pi_k(m)=s\cdot\ell_k(m)$，其中 s 為$\pi_k(m)$中出現$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 或 $x_1,\cdots,x_{k-1}$的段數。

另外，k階餘數數列在某項後均為常數，顯然**週期長度等於1**，即 $\pi_k(m)=1$。

【**定義2**】(**k階餘數數列的週期性質**，M. S. Renault [7]、Rogers, N. [8])

表 1：費氏數列的週期性質

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610
mod 2	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
mod 3	0	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0	2	2	1
mod 4	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2	3	1	0	1	1	2

表 2：三階線性遞迴數列 $\{a_n^3\}:a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3},m=7\quad(\pi_3(7)=3\cdot16=48)$

第一段	1	1	2	4	0	6	3	2	4	2	1	0	3	4	0	0
第二段	4	4	1	2	0	3	5	1	2	1	4	0	5	2	0	0
第三段	2	2	4	1	0	5	6	4	1	4	2	0	6	1	0	0

表 3：三階線性遞迴數列$\{a_n^3\}:a_n=3a_{n-1}+5a_{n-2}+8a_{n-3},m=22\quad(\pi_3(22)=5\cdot12=60)$

第一段	1	3	14	21	3	6	3	19	10	17	11	0
第二段	15	1	12	7	1	2	1	21	18	13	11	0
第三段	5	15	4	17	15	8	15	7	6	19	11	0
第四段	9	5	16	13	5	10	5	17	2	21	11	0
第五段	3	9	20	19	9	18	9	13	8	7	11	0

有些數列在某幾項後才出現循環週期列，稱為**前週期數列**。

$\{a_n^2\}:a_n=2a_{n-1}+6a_{n-2},m=10:$

$\boxed{1,2,0}$,2,4,0,4,8,0,8,6,0,6,2,0

退化情形

k**階餘數數列在某項後均為0，即**$\{a_n^3\}:a_n=2a_{n-1}+4a_{n-2}+2a_{n-3},m=8:1,2,0,2,0,0,4,0,0,\cdots,0,0$

k**階餘數數列在某項後均為不全為0的常數，即**$\{a_n^2\}:a_n=4a_{n-1}+6a_{n-2},m=18:1,4,4,\cdots,4,4$

【**預備定理 1~2**】(k **階Cassini恆等式**， Rogers, N. [8])

$$\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+2} \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-k+1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ddots & a_{n-k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-k+2} & a_{n-k+1} & a_{n-k} & \cdots & a_{n-2k+3} \end{vmatrix}=\begin{cases}(-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}c_k^{n-k+1} & \text{,其中}k\text{為奇數}\\ (-1)^{n-\frac{k}{2}+1}c_k^{n-k+1} & \text{,其中}k\text{為偶數}\end{cases}$$

【**預備定理 6**】

(**高次剩餘**，Courant, R. and Robbins, H.[4])

若s滿足$x^s\equiv d\pmod m$且s是**最小的一個**，則 $s\,|\,\varphi(m)$ 。

【**預備定理 5**】(**歐拉-費馬定理**(Euler-Fermat Theorem)， Hardy and Wright [6])

設 x,m為正整數且$\gcd(x,m)=1$，則(i) $x^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\,m)$，其中$\varphi(m)$為歐拉函數。

(ii)反之，若正整數s滿足$x^s\equiv 1\pmod m$ 且s是**最小的一個**，則$s\,|\,\varphi(m)$ 。

二、研究方法或過程或結果

1.探討k階餘數數列的週期性質

【**定理 1**】設$\{a_n^k\}$為k階線性遞迴數列，若 r_n為a_n模m後的餘數($m\in N$)，則

(i) $\gcd(c_k,m)=1$:**週期數列**。 (ii) $\gcd(c_k,m)\neq 1$: **週期數列或前週期數列**。

2.由$k-1$個0均勻分割來區分循環週期列

【**性質 2**】設$\{r_n^k\}$為k階線性遞迴數列$\{a_n^k\}$中的餘數數列，若 $\gcd(c_k,m)=1$，

則每個週期循環列中會是由$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$均勻分割。

區分週期循環列的條件

$(1)\ \gcd(c_k,m)=1$: 每個週期循環列會是由 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割，參見性質 2。

【性質 3~4】設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階線性遞迴數列 $\{a_n^k\}$ 中的餘數數列且 $\gcd(c_k,m)=1$，則
(i)當 $c_k=1$ 時，$r_{i+j+k-2}\equiv[\![r_jr_{i-1}]\!]\pmod m$，其中 $[\![r_jr_{i-1}]\!]$ 為 r_jr_{i-1} 模 m 後的餘數。 (ii)當 $c_k\neq1$ 時，$r_{i+j+k-2}\equiv[\![c_kr_jr_{i-1}]\!]\pmod m$。

$c_2=1$ $\{a_n^2\}:a_n=2a_{n-1}+a_{n-2},m=13$

第1段	r_j	$r_1=1$	$r_2=2$	$r_3=5$	$r_4=12$	$r_5=3$	$r_6=5$	$r_7=0$
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
第2段	$[\![r_jr_6]\!]_{\bmod 13}$	5	10	25 =12	8	2	12	0
第3段	$[\![r_jr_6^2]\!]_{\bmod 13}$	25 =12	11	8	1	10	8	0

$c_2\neq1$ $\{a_n^2\}:a_n=a_{n-1}+2a_{n-2},m=11$

第1段	r_j	$r_1=1$	$r_2=1$	$r_3=3$	$r_4=5$	$r_5=0$
	$c_2r_jr_4$	10	10	30	50	0
第2段	$[\![c_2r_jr_4]\!]_{\bmod 11}$	10	10	8	6	0

每個週期循環列中分段方式

【定理 2】設 $\{r_n^2\}$ 為二階線性遞迴數列 $\{a_n^2\}$ 中的餘數數列且 $\gcd(c_2,m)=1$，若 s 為週期循環列中由0均勻分割的段數，其中 $\ell_2(m)-1=\alpha$，則(i)當 $c_2\neq1$ 時，$[\![r_\alpha^2]\!]\equiv[\![c_2^{\alpha-1}]\!]\pmod m$ 或 $[\![r_\alpha^4]\!]\equiv[\![c_2^{2\alpha-2}]\!]\pmod m$。

(ii)當 $c_2=1$ 時，$[\![r_\alpha^2]\!]\equiv1\pmod m$ 或 $[\![r_\alpha^4]\!]\equiv1\pmod m$。

【定理 5】設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階線性遞迴數列 $\{a_n^k\}$ 中的餘數數列且 $\gcd(c_k,m)=1$，若 s 為週期循環列中由0均勻分割的段數，

其中 $\ell_k(m)-k+1=\alpha$，則(i)當 $c_k\neq1$ 時，$[\![r_\alpha^k]\!]\equiv\begin{cases}c_k^{\alpha-1}, & \text{其中}k\text{為奇數}\\ \pm c_k^{\alpha-1}, & \text{其中}k\text{為偶數}\end{cases}\pmod m$ (ii)當 $c_k=1$ 時，$[\![r_\alpha^k]\!]\equiv\begin{cases}1, & \text{其中}k\text{為奇數}\\ \pm1, & \text{其中}k\text{為偶數}\end{cases}\pmod m$。

第一段為 $1,r_2,r_3,r_4,r_5,\cdots,r_\alpha,0$

第二段為 $c_2r_1r_\alpha$, $c_2r_2r_\alpha$ $,\cdots,[\![c_2r_\alpha^2]\!],0$

$\vdots$

第 s 段為 $[\![c_2^{s-1}r_\alpha^{s-1}]\!],[\![c_2^{s-1}r_2r_\alpha^{s-1}]\!],[\![c_2^{s-1}r_3r_\alpha^{s-1}]\!],\cdots,[\![c_2^{s-1}r_\alpha^{s}]\!],0$

由2階Cassini恆等式知 $a_{\alpha-1}a_{\alpha+1}-a_\alpha^2=(-1)^\alpha c_2^{\alpha-1}$

第一段為 $1,r_2,r_3,r_4,r_5,\cdots,r_\alpha,\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$

第二段為 $c_kr_1r_\alpha$, $c_kr_2r_\alpha$ $,\cdots,[\![c_kr_\alpha^2]\!],\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$

$\vdots$

第 s 段為 $[\![c_k^{s-1}r_\alpha^{s-1}]\!],[\![c_k^{s-1}r_2r_\alpha^{s-1}]\!],[\![c_k^{s-1}r_3r_\alpha^{s-1}]\!],\cdots,[\![c_k^{s-1}r_\alpha^{s}]\!],\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$

探討週期循環列均勻分割的段數

【定理 4】設 $\{r_n^2\}$ 為二階線性遞迴數列 $\{a_n^2\}$ 中的餘數數列，若 $\gcd(c_2,m)=1, c_2=1$，則 $s=\begin{cases}1, & \text{其中}r_\alpha=1\\ 2, & \text{其中}r_\alpha=m-1\\ 4, & \text{其餘}r_\alpha\text{要滿足}r_\alpha^2\equiv-1\pmod m\end{cases}$

由【定理 2】知 $[\![r_\alpha^2]\!]\equiv1\pmod m$ 或 $[\![r_\alpha^4]\!]\equiv1\pmod m$，由預備定理 5：歐拉-費馬定理且 $[\![r_\alpha^s]\!]\equiv1\pmod m$ 知 $s=1,2,4$ 。

(a)當 $r_\alpha=1$ 時，$s=1$。 (b)當 $r_\alpha=m-1$ 時，$s=2$ 。 (c)當 $r_\alpha=i\ (i=2,\cdots,m-2)$ 時，$i^2\equiv-1\pmod m$ 所以 $s=4$。

【定理 7】設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階線性遞迴數列 $\{a_n^k\}$ 中的餘數數列，若 $\gcd(c_k,m)=1, c_k=1$，則
(i)當 k 為奇數時，$\pi_k(m)=s\cdot\ell_k(m)$，其中 $s\mid k$。(ii)當 k 為偶數時，$\pi_k(m)=s\cdot\ell_k(m)$，其中 $s\mid 2k$。

(i)當 k 為奇數時，由定理 5知 $[\![r_\alpha^k]\!]\equiv1\pmod m$ 。由預備定理 5：歐拉-費馬定理且 $[\![r_\alpha^s]\!]\equiv1\pmod m$ 得到 $s\mid k$ 。
例如：$k=9, s\mid9\Rightarrow s=1,3,9$
(ii)當 k 為偶數時，由定理 5知 $[\![r_\alpha^k]\!]\equiv1\pmod m$ 或 $[\![r_\alpha^{2k}]\!]\equiv1\pmod m$。由預備定理 5：歐拉-費馬定理且 $[\![r_\alpha^s]\!]\equiv1\pmod m$ 知 $s\mid 2k$
以 $k=6$ 為例，$s\mid 2k\Rightarrow s\mid12$ ，所以 $s=1,2,3,4,6,12$
(a)當 $r_\alpha=1$ 時，$s=1$。
(b)當 $r_\alpha=m-1$ 時，$s=2$ 。
(c)當 $r_\alpha=i\ (i=2,\cdots,m-2)$ 時，$i^3\equiv1\pmod m$ 所以 $s=3$。
(d)當 $r_\alpha=i\ (i=2,\cdots,m-2)$ 時，$i^2\equiv-1\pmod m$，所以 $s=4$ 。
(e)當 $r_\alpha=i\ (i=2,\cdots,m-2)$ 時，$i^3\equiv-1\pmod m$，所以 $s=6$ 。
(f)當 $r_\alpha=i\ (i=2,\cdots,m-2)$ 時，$i^6\equiv-1\pmod m$，所以 $s=12$。

【定理 3,6】設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階線性遞迴數列 $\{a_n^k\}$ 中的餘數數列，若 $\gcd(c_k,m)=1, c_k\neq1$，則 $\pi_k(m)=s\cdot\ell_k(m)$，其中 $s\mid\varphi(m)$。

預備定理 6：高次剩餘知 $[\![r_\alpha^k]\!]\equiv\begin{cases}c_k^{\alpha-1}, & \text{其中}k\text{為奇數}\\ \pm c_k^{\alpha-1}, & \text{其中}k\text{為偶數}\end{cases}\pmod m$ 必有解且循環 $r_\alpha\to c_2r_\alpha^2\to c_2^2r_\alpha^3\to\cdots\to c_2^{s-1}r_\alpha^s\to r_\alpha$

$(2)\ \gcd(c_k,m)\neq1$: 每個週期循環列會是由 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割。

【定理 8】設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階線性遞迴數列 $\{a_n^k\}$ 中的餘數數列，若 $\gcd(c_k,m)\neq1$，且 $\gcd(c_1,c_2,\cdots,c_k,m)=d, c_k'=c_k/d, m'=m/d$
則(i)當 $\gcd(c_k',m')=1$ 時，k 階餘數數列是前週期數列且每個週期循環列中會是由 $k-1$ 個0均勻分割。
(ii)當 $\gcd(c_k',m')\neq1$ 時，k 階餘數數列是前週期數列且每個週期循環列中會有由 $k-1$ 個0均勻分割。

$\{a_n^2\}:a_n=2a_{n-1}+6a_{n-2},m=10$ 考慮 $c_2'=6/2=3, m'=10/2=5$ 對應新數列 $\{a_n^2\}:a_n=1a_{n-1}+3a_{n-2},m=5$

$\boxed{1,2,0},2,4,0,4,8,0,8,6,0,6,2,0$ 但 $\gcd(c_k',m')=\gcd(3,5)=1$ $m'=5$ $1,1,4,2,4,0,2,2,3,4,3,0,4,4,1,3,1,0,3,3,2,1,2,0$

$\{a_n^2\}:a_n=2a_{n-1}+4a_{n-2},m=24$ 考慮 $c_2'=4/2=2, m'=24/2=12$ 對應新數列 $\{a_n^2\}:a_n=1a_{n-1}+2a_{n-2},m=12$

$\boxed{1,2,8,0},8,16,16,0,16,8,8,0$ 但 $\gcd(c_k',m')=\gcd(2,12)=2$ $m'=12$ $\boxed{1,2,8,0},8,4,4,0,4,8,8,0$

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割的退化情形

【定理 9】設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階餘數數列，若 $\gcd(c_k,m)\neq1$ 且 $\gcd(c_1,c_2,\cdots,c_k)=\ell, m=\ell^t\ (t\in N)$，則 k 階餘數數列 $\{r_n^k\}$ **在某項後均為0。**

(a) $\gcd(c_k',m')=1$ $\{a_n^3\}:a_n=2a_{n-1}+4a_{n-2}+2a_{n-3},m=8$ $1,2,0,2,0,0,4,0,0,\cdots,0,0$ **k 階餘數數列在第8項後均為0**

(b) $\gcd(c_k',m')\neq1$ $\{a_n^2\}:a_n=4a_{n-1}+8a_{n-2},m=16$ $1,4,8,0,0,\cdots,0,0$ **k 階餘數數列在第4項後均為0**

3.由 $k-1$ 個不全為0均勻分割來區分循環週期列

區分週期循環列的條件

$(3)\ \gcd(c_k,m)\neq 1$:每個週期循環列會是由 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 均勻分割，參見性質 5。

$\{a_n^3\}: a_n=3a_{n-1}+5a_{n-2}+8a_{n-3}, m=22$

	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	r_6	r_7	r_8	r_9	r_{10}	r_{11}	r_{12}
$m=2$	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0
$m=11$	1	3	3	10	3	6	3	8	10	6	0	0
$m=22$	1	3	14	21	3	6	3	19	10	17	11	0

考慮 r_{11} 與 r_{12} 的線性同餘方程組為

$$\begin{cases} r_{11}\equiv 1 \pmod 2 \\ r_{11}\equiv 0 \pmod{11}\end{cases}, \begin{cases} r_{12}\equiv 0 \pmod 2 \\ r_{12}\equiv 0 \pmod{11}\end{cases}$$

則由中國剩餘定理知 $r_{11}\equiv 11 \pmod{22}, r_{12}\equiv 0 \pmod{22}$

可見 $m=2$ 是三階中退化情形，是由2個不全為0均勻分割。

區分週期循環的條件

週期數列

$\gcd(c_k,m)=1$

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割

$\gcd(c_1,\cdots,c_k,m)=d\,(d>1), c_k'=c_k/d, m'=m/d$

$\gcd(c_k',m')=1$

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割

在某項後均為0

$\gcd(c_k',m')\neq 1$

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 或 $x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 均勻分割

在某項後均為0或不全為0的常數

週期數列或前週期數列

$\gcd(c_k,m)\neq 1$

$\gcd(c_1,\cdots,c_k,m)\neq 1$

$\gcd(c_1,\cdots,c_k,m)=1$

$x_1,x_2,\cdots,x_{k-1}$ 均勻分割

在某項後均為不全為0的常數

$(a)\quad \gcd(c_k',m')\neq 1$ $\qquad \{a_n^2\}: a_n=8a_{n-1}+12a_{n-2}, m=18: \boxed{1,8,4,2,14,16},8,4,2,10,14,16$

$(b)\quad \gcd(c_1,\cdots,c_k,m)=1$ $\qquad \{a_n^2\}: a_n=4a_{n-1}+3a_{n-2}, m=18: \boxed{1,4,1,16,13,10,7},4,1,16,13,10,7$

【性質 6】設 $\{r_n^2\}$ 為二階線性遞迴數列 $\{a_n^2\}$ 中的餘數數列且 $\gcd(c_2,m)\neq 1$，則 $r_{i+j}\equiv [\![r_{j+1}x_1+c_2r_jr_{i-1}]\!] \pmod m$。

【定理 10-11 】設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階餘數數列，若 $\gcd(c_k,m)\neq 1, \gcd(c_1,\cdots,c_k,m)=1$，則

(i) 當 $k=3$ 時，$r_{i+j+1}\equiv [\![r_{j+1}x_2+c_2r_jx_1+c_3(r_{j-1}x_1+r_jr_{i-1})]\!] \pmod m$。 (iii) $\pi_k(m)=s\cdot\ell_k(m)$，其中 $s\,|\,\varphi(m)$。

(ii) $r_{i+j+k-2}\equiv \left[\!\!\left[r_{j+1}x_{k-1}+\sum_{\ell_1=2}^{k-1}\left[c_{\ell_1}\sum_{\ell_2=2}^{\ell_1} r_{j-\ell_1+\ell_2}x_{k-\ell_2}\right]+c_k\sum_{\ell=1}^{k-2} r_{j-\ell}x_\ell+c_kr_jr_{i-1} \right]\!\!\right] \pmod m$。

第一段 $\quad r_1,r_2,r_3,r_4,r_5,\cdots,r_\alpha,x_1$

第二段 $\quad r_2x_1+c_2r_1r_\alpha\ ,\ r_3x_1+c_2r_2r_\alpha\ ,\cdots,[\![x_1^2+c_2r_\alpha^2]\!],x_1$

第三段 $\quad [\![r_2x_1+c_2r_1x_1^2+c_2^2r_1r_\alpha^2]\!],\cdots,[\![x_1^2+c_2r_\alpha x_1^2+c_2^2r_\alpha^3]\!],x_1$

第 s 段 $\quad \left[\!\!\left[r_2x_1+r_1x_1^2\sum_{i=1}^{s-2}c_2^ir_\alpha^{i-1}+c_2^{s-1}r_1r_\alpha^{s-1}\right]\!\!\right],\cdots,\left[\!\!\left[x_1^2+x_1^2\sum_{i=1}^{s-2}c_2^ir_\alpha^i+c_2^{s-1}r_\alpha^s\right]\!\!\right],x_1$

由Cassini恆等式知 $a_{\alpha-1}a_{\alpha+1}-a_\alpha^2=(-1)^\alpha c_2^{\alpha-1}$。

兩邊模 m 得 $x_1r_{\alpha-1}-r_\alpha^2\equiv(-1)^\alpha c_2^{\alpha-1} \pmod m$。

$\{a_n^2\}: a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}, m=10$

1 3 1 9 9 **5** 3 9 3 7 7 **5** 9 7 9 1 1 **5** 7 1 7 3 3 **5**

$5\cdot 9-9^2\equiv(-1)^5 2^4 \pmod{10} \Rightarrow 36\equiv 16 \pmod{10}$

退化情形

在某項後均為不為0的常數 $\gcd(c_k,m)\neq 1, \gcd(c_1,c_2,\cdots,c_k,m)=1$ 及 $\gcd(c_1,c_2,\cdots,c_k,m)\neq 1, \gcd(c_k',m')\neq 1$

$\{a_n^2\}: a_n=4a_{n-1}+6a_{n-2}, m=9$ $\boxed{1},4,4,4,\cdots,4$ $\qquad \{a_n^5\}: a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+2a_{n-3}+2a_{n-4}+2a_{n-5}, m=2$ $1,1,1,1,\cdots$

4.計算 k 階餘數數列中的循環週期

【定理 12~13】(k階餘數數列的週期循環性質)

設 β 為 $\{a_n^k\}$ 中模 m 後的餘數數列的週期，若 $m=p_1^{t_1}\times p_2^{t_2}\times\cdots\times p_u^{t_u}$，且 $\beta_1,\cdots,\beta_u$ 分別為 $\{a_n^k\}$ 中模 $p_1^{t_1},\cdots,p_u^{t_u}$ 後的餘數數列的週期，則 $\pi_k(m)=lcm(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_u)$。

<table>
<tr><td>m</td><td>2</td><td colspan="2">4</td><td>8</td><td>16</td><td>2^{t_1}</td></tr>
<tr><td>$\pi_2(m)=p_1^{t_1-1}\beta_1'$</td><td>3</td><td colspan="2">$6=2^{2-1}\cdot 3$</td><td>$12=2^{3-1}\cdot 3$</td><td>$24=2^{4-1}\cdot 3$</td><td>$\pi_2(m)=2^{t_1-1}\cdot 3$</td></tr>
<tr><td>m</td><td>3</td><td>5</td><td>7</td><td>12</td><td>10</td><td>28</td></tr>
<tr><td>$\pi_2(m)=lcm(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_u)$</td><td>1</td><td>24</td><td>24</td><td>$6=lcm(6,1)$</td><td>$24=lcm(3,24)$</td><td>$24=lcm(6,24)$</td></tr>
</table>

5.探討數列的因倍數性質

【定理 14】費氏數列: $a_{m+n}=a_ma_{n+1}+a_{m-1}a_n$ 且 $a_n\,|\,a_{mn}$

【定理 15】二階線性遞迴數列

(i) 當 $c_1=1, c_2\in N$ 時，則 $a_{m+n}=a_ma_{n+1}+c_2a_{m-1}a_n$ 且 $a_n\,|\,a_{mn}$。(ii) 當 $c_1\in N, c_2=1$ 時，則 $a_{m+n}=a_ma_{n+1}+a_{m-1}a_n$ 且 $a_n\,|\,a_{mn}$。

(iii) 當 $c_1\in N\setminus\{1\}, c_2\in N$ 時，則 $a_{m+n}=a_ma_{n+1}+c_2a_{m-1}a_n$ 且 $a_n\,|\,a_{mn}$。

【定理 16】k 階線性遞迴數列

(i) 當 $c_k=1$ 或 $c_k\neq 1, \gcd(c_k',m')=1$ 時，則 $m\,|\,a_{n\ell_k(m)-i}$ 且 $m\,|\,a_{n\pi_k(m)-i}$，其中 $i=0,1,\cdots,k-2$。

(ii) 其餘 $m\nmid a_{n\ell_k(m)-i}$ 且 $m\nmid a_{n\pi_k(m)-i}$ 或 $[\![a_{n'+j}]\!]\equiv 0 \pmod m$, 其中 $j=0,1,\cdots$。

三、結論與未來展望

1.結論

本作品將費氏數列中的**餘數數列性質**推廣到高階線性遞迴數列的情形，所得餘數數列為週期數列或前週期數列。我們探討出**區分週期循環的條件**，進一步用週期循環列均勻分割方式得到均勻分割循環規律，精確計算其週期長度。 最後由週期性質推導**高階線性遞迴數列的因倍數性質**。

2.未來展望

(i) 探討前週期數列的性質。 (ii)探討因倍數定理。期盼未來可被廣泛應用於密碼學及大數分解上。

四、參考資料

[1] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**，**33**(4)，47-62。

[2] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**，**34**(1)，35-57。

[3]Bolat, C. and Köse, H., On the Properties of k-Fibonacci Numbers, *Int J Contemp Math .Sciences*, 22: 1097-1105, 2010.

[4] Courant, R. and Robbins, H. *Quadratic Residues. 2nd ed.* Oxford, England: Oxford University Press, pp. 38-40, 1996.

[5]Grimaldi, Ralph P. *Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction.* Mass.:Addison-Wesley Longman. P 244–248, 1998.

[6] Hardy, G. H. and Wright, E. M. *An Introduction to the Theory of Numbers, 5th ed.* Oxford, England: Clarendon Press, pp. 67-68, 1979.

[7] M. S. Renault, *The Fibonacci Sequence Under Various Moduli*, Master's Thesis, Wake Forest University, 1996.

[8] Rogers, N., Campbell, C.W., The Period of the Fibonacci Sequence Modulo j, Phd, The University of Arizona, Tucson, USA, 2007.