112 學年度成淵高中高一新生數學暑假作業

裝訂說明：

1. 請以 A4 紙張雙面影印，封面與內頁第 1 頁印在同一張 A4 紙的正反面，不需分開列印
2. 紙張左側以釘書機或膠水、膠帶裝訂成一本

書寫說明：

1. 每一題請務必親自並詳細列出計算過程，並仔細完成最後答案
2. 每一題均附有解答，務必確實核對並訂正
3. 若無過程，僅有解答，或書寫錯誤未予更正或訂正者，視同未完成
4. 請於開學前完成，並於開學後攜帶至學校，依所分發班級之數學老師規定的時間繳交
5. 此次作業內容將作為開學數學複習測驗之考試範圍

計分方式：

1. 開學後依所分發班級的數學老師決定此次暑假作業佔學期成績之比例
2. 此次暑假作業內容於開學之複習測驗成績，將依所分發班級之數學老師決定所佔學期成績之比例

請依開學後所分發之班級填入以下資料：

成淵高中

一年____班____號

姓名：________________

乘法公式：

(1) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

(2) $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

(3) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

(4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

(5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

(6) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

(7) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

指數律：

設 $a \neq 0$，$b \neq 0$，m、n 為正整數，則

(1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

(2) $a^m \div a^m = a^{m-n}$

(3) $(a^m)^n = a^{mn}$

(4) $(a \times b)^m = a^m \times b^m$

科學記號：

將一個正數 a 表成 $a = b \times 10^n$ 的型式，其中 n 為整數，且 $1 \le b < 10$。

例：$35600 = 3.56 \times 10^4$

練習：

1. 計算 $(3+\sqrt{5})^3(3-\sqrt{5})^3$ 的值。

答：64

2. 計算 $\dfrac{2019^2 - 2 \times 2019 + 1}{2018} - \dfrac{108^2 + 2 \times 108 \times 1911 + 1911^2}{2019}$ 的值。

答：-1

3. 已知 $\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=3$，求 $\dfrac{\beta+1}{\alpha}+\dfrac{\alpha+1}{\beta}$ 的值。

答：12

4. 已知 a、b、c、d 為實數，且

$$(a^2+2a+1)+(b^2+b+\frac{1}{4})+(c^2-c+\frac{1}{4})+(d^2-2d+1)=0$$

，則求 $a+b+c+d$ 的值。

答：0

5. 已知 $A=(3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$，求 A 的個位數字。

答：0

6. 所謂『PM2.5』是指粒徑小於 2.5 微米的細微懸浮微粒，而登革熱病毒則是直徑約 30~50 奈米的球形病毒。已知 1 微米 $=10^{-6}$ 公尺，1 奈米 $=10^{-9}$ 公尺，試問 2.5 微米是 50 奈米的多少倍？

答：50 倍

平方根與 n 次方根及其性質：

(1) 已知 $a \geq 0$，且 $x^2 = a$，稱 x 是 a 的平方根，且 $x = \pm\sqrt{a}$

(2) $\sqrt[n]{a}$：其中稱 n 為開方數，稱 a 為被開方數，而 $\sqrt[n]{a}$ 為 a 的 n 次方根

(3) $\sqrt{a^2} = \begin{cases} a，當 a \geq 0 \\ -a，當 a < 0 \end{cases}$ ； $\sqrt[3]{a^3} = a$ ； $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a，當 n 為奇數 \\ |a|，當 n 為偶數 \end{cases}$

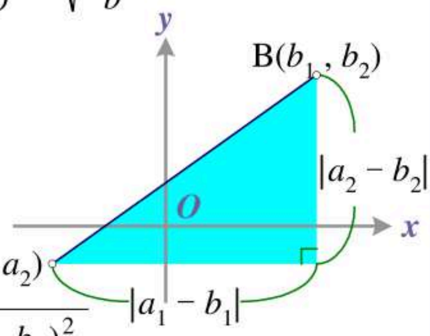
(4) $a = m^2 \times k$，則 $\sqrt{a} = \sqrt{m^2 \times k} = m\sqrt{k}$，其中 $m > 0$ 且 $k > 0$

(5) a、$b \geq 0$，$\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$；$\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}$ (此時 $b \neq 0$)

(6) a、b 為任意實數，$\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$；$\dfrac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\dfrac{a}{b}}$ (此時 $b \neq 0$)

畢氏定理與距離公式：

如右圖，坐標平面上兩點，A(a_1, a_2)、B(b_1, b_2)，



(1) 畢氏定理：$\overline{\text{AB}}^2 = |a_1 - b_1|^2 + |a_2 - b_2|^2$

(2) 坐標平面上兩點距離：$\overline{\text{AB}} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$

練習：

7. 求：$4\sqrt{12} + 2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + \dfrac{2}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2-\sqrt{2}} + \dfrac{1}{2+\sqrt{2}}$ 。

答：$2\sqrt{3} + \sqrt{2} + 2$

說明：若 $a > b > 0$，$\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{1\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\times(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$

8. 若 n 為整數且 $\sqrt{108-n}$ 亦為正整數，試求符合條件的 n 共有幾個。

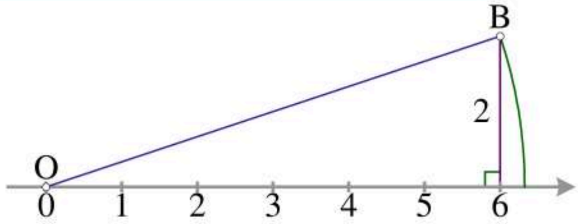
答：10 個

9. 已知$-3<a<1$，則求$\sqrt{(a-1)^2}+\sqrt{(a+3)^2}$的值。

答：4

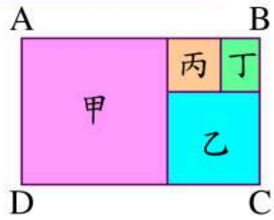
10.如下圖，以 O(0)為圓心，$\overline{OB}$為半徑畫弧，交數線於點 P，求點 P 的坐標。

答：$2\sqrt{10}$



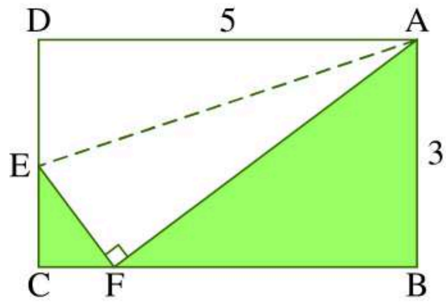
11.如下圖，長方形 ABCD 中，甲、乙、丙皆為正方形，若乙的面積為 6，丙的面積為 2，試求長方形 ABCD 的面積。

答：$14+6\sqrt{3}$



12.如下圖，ABCD 為長方形，$\overline{AB}=3$，$\overline{AD}=5$。今若將頂點 D 摺起與$\overline{BC}$邊上的點 F 重合，求摺痕$\overline{AE}$的長度。

答：$\dfrac{5\sqrt{10}}{3}$



等差數列及其性質：

(1) 一群數字排成一列，稱為數列，如：a_1、a_2、a_3、⋯、a_{n-1}、a_n，會以 $< a_n >$ 表之。其中，a_1 稱為首項、a_n 稱為末項，此數列共有 n 項

(2) 等差數列，一個數列 $< a_n >$，
滿足 $d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = a_4 - a_3 = \cdots = a_n - a_{n-1}$，
d 稱為公差，且 $a_k = a_1 + (k-1) \times d$

(3) 若 a、b、c 三數依序成等差數列，則 $b = \dfrac{a+c}{2}$，b 稱為 a 與 c 的等差中項

(4) 將一數列 a_1、a_2、a_3、⋯、a_{n-1}、a_n 相加，即 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ 稱為級數

(5) 等差級數前 n 項的和

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2} = \frac{[2a_1 + (n-1) \times d] \times n}{2}$$

練習：

13. 如下圖，每一直行，每一橫行或任一對角線上的三數皆為等差數列，求 b 的值。

答：29

a	b	c
d	9	e
3	f	−25

14. 等差數列 $< a_n >$ 共有 10 項，第 2 項 $a_2 = 12$，第 9 項 $a_9 = -2$，求此數列的所有項的和。

答：50

15. 等差數列 $< a_n >$ 首項為 −113，第 2 項為 −105，則此數列自第幾項開始為正數。

答：第 16 項

16.將所有正整數分組如下：第一組：$(1, 2)$；第二組：$(3, 4)$；

第三組：$(5, 6, 7, 8)$；第 k 組：$(2^{k-1}+1, 2^{k-1}+2, \cdots, 2^{k})$，其中 k 為大於 2 的正整數；…依此規律，則求第 6 組之中所有正整數的總和。

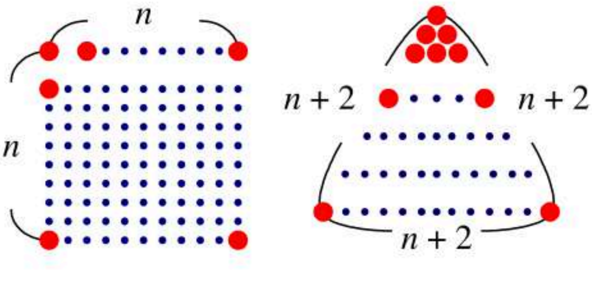
答：1552

17.籃球場的看臺觀眾席 D 區有 15 排座位，此區每一排都比其前一排多 1 個座位，阿哲坐在第 6 排，發現此排共有 20 個座位，則試求觀眾席 D 區總共有幾個座位。

答：330

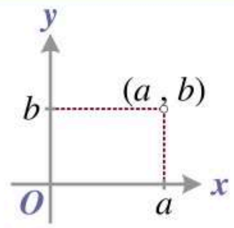
18.有大小相同的球若干個，已知全部的球剛好可以排成一個每邊有 n 個球的正方形。若將全部的球改排成一個每邊 $n+2$ 個球的正三角形，也剛好用完所有的球。試求全部的球有幾個。

答：36 個



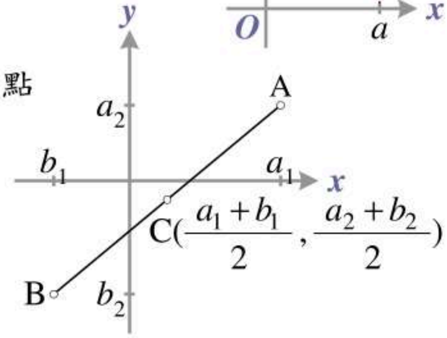
坐標平面與函數：

(1) 兩條互相垂直的數線構成平面直角坐標系，
平面上所有點都有對應的坐標 (a , b)，
其中 a 稱為 x 坐標、b 稱為其 y 坐標



(2) 坐標平面上兩點 $A(a_1 , a_2)$、$B(b_1 , b_2)$的中點

$C(\frac{a_1+b_1}{2} , \frac{a_2+b_2}{2})$



(3) 對於每一個 x 值，都恰有一個 y 值與之對應，則稱 y 是 x 的函數，
以符號 $y = f(x)$表示。其中 x 稱為自變數，y 稱為應變數。

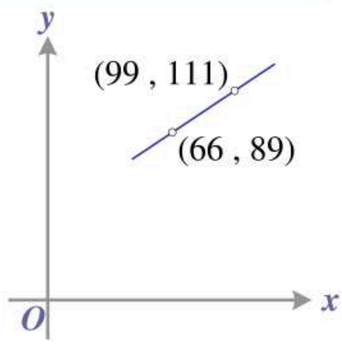
(4) 線型函數或一次函數：$y = f(x) = ax + b$ (a 與 b 為任意實數)，此類型函數在坐標平面上的圖形為$\boxed{\text{一直線}}$

(5) 二次函數：$y = f(x) = a(x-h)^2 + k$ (a、h、k 為任意實數，且 $a \neq 0$)，此類型函數在坐標平面上的圖形為$\boxed{\text{拋物線}}$

練習：

19.如下圖，直線 L 為線型函數 $f(x) = ax + b$，求 $f(0)$的值。

答：45



20.直角坐標平面原點 O(0 , 0)到直線 L：$3x + 4y - 12 = 0$ 上的所有點的距離之中，最小的距離為何？

答：$\frac{12}{5}$

21.已知 $f(x)=2x^2-8x+m$ 的最小值為 160，求 m 的值。

答：168

22.二次函數 $y=x^2+9x-36$ 的圖形與 x 軸交於相異兩點 A、B，求$\overline{\text{AB}}$的長。

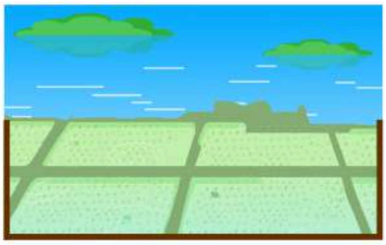
答：15

23.將二次函數 $y=-x^2-6x-3$ 的圖形下移 k 單位，新圖形與 x 軸恰交於一點，求 k 的值。

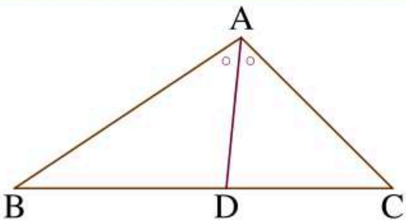
答：$k=6$

24.小明想用 60 公尺的鐵絲網在河邊圍成一長方形的菜圃，河邊可當一邊不用鐵絲網，僅圍其餘三邊。則小明可圍成的長方形菜圃的最大面積為多少平方公尺。

答：450 平方公尺



三角形與圓及其性質：



(1) 在△ABC 中，$\overline{AD}$平分∠BAC，

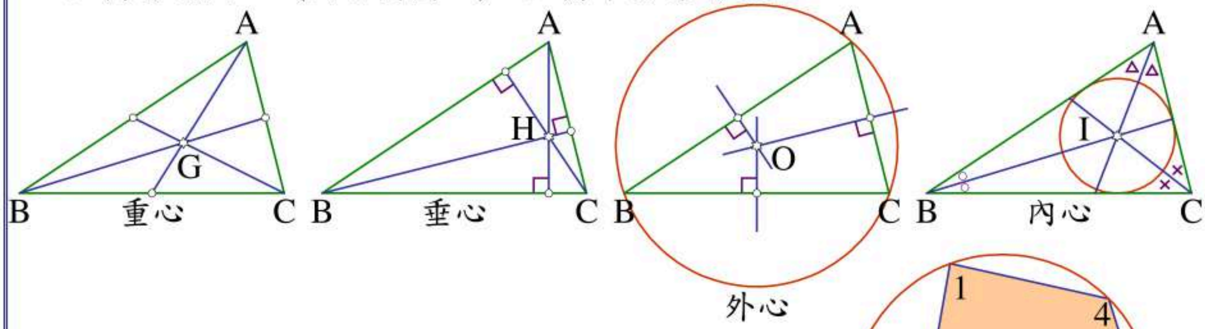
則$\overline{AB}$：$\overline{AC}$ = $\overline{BD}$：$\overline{CD}$

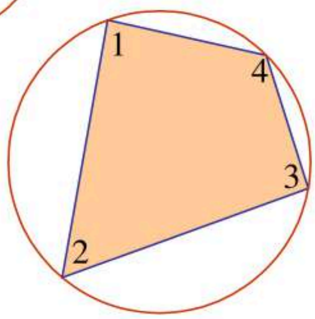
(2) 三角形的重心 G：三中線的交點

三角形的垂心 H：三高的交點

三角形的外心 O(外接圓圓心)：三中垂線的交點

三角形的內心 I(內切圓圓心)：三角平分線的交點





(3) 圓內接四邊形對角互補：

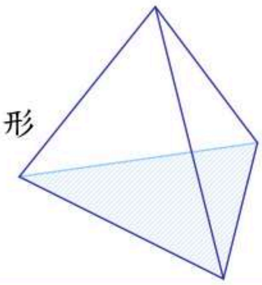
∠1 + ∠3 = ∠2 + ∠4 = 180°

(4) 對同弧的圓周角相等；圓心角為圓周角的兩倍

特殊立體圖形：

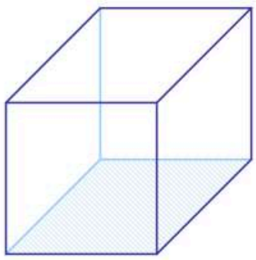
(1) 正四面體：

四個面都是正三角形



正六面體：

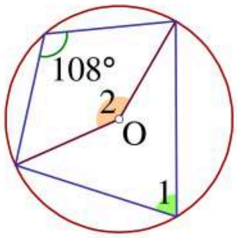
六個面都是正方形



練習：

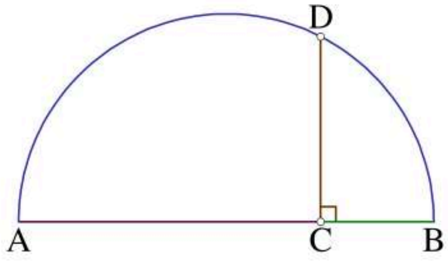
25.如下圖，O 為圓心，求∠2 的度數。

答：144°



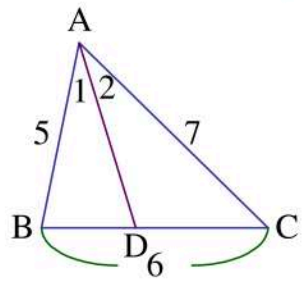
26.如下圖，$\overline{AB}$為直徑，點 C 在$\overline{AB}$上，點 D 在圓弧上，且$\overline{AC}=8$，$\overline{BC}=3$，若$\overline{CD}\perp\overline{AB}$，求$\overline{CD}$的長。

答：$2\sqrt{6}$



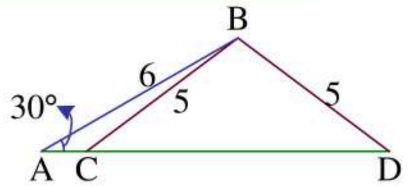
27.如下圖，△ABC 的三邊長依序為 5、6、7，且知∠1＝∠2，求$\overline{BD}$的長。

答：$\frac{5}{2}$



28.如下圖，求$\overline{CD}$的長。

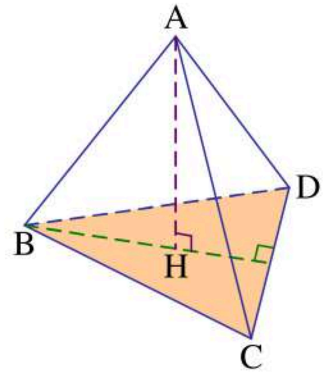
答：8



29.如下圖，正四面體 ABCD 的邊長為 $4\sqrt{3}$，H 為△BCD 的重心，

已知$\overline{AH}\perp\overline{BH}$，則：(1) 求$\overline{AH}$的長；(2) 求正四面體 ABCD 的體積。

答：(1) $4\sqrt{2}$；(2) $16\sqrt{6}$



30.如下圖，OABCPQRS 為一個長方體，$\overline{OA}=2$，$\overline{OC}=3$，$\overline{OP}=4$，

(1) 一隻蜜蜂由點 O 飛到點 R，求其最短路徑長。

(2) 一隻蜜蜂由點 O 爬到點 R，求其最短路徑長。

答：(1) $\sqrt{29}$；(2) $\sqrt{41}$