簡介

在13世紀初，義大利數學家**費波那契** (Fibonacci) 所著《**算盤書**》一書中談到兔子的生長問題，可用二階實係數遞迴關係來描述如下

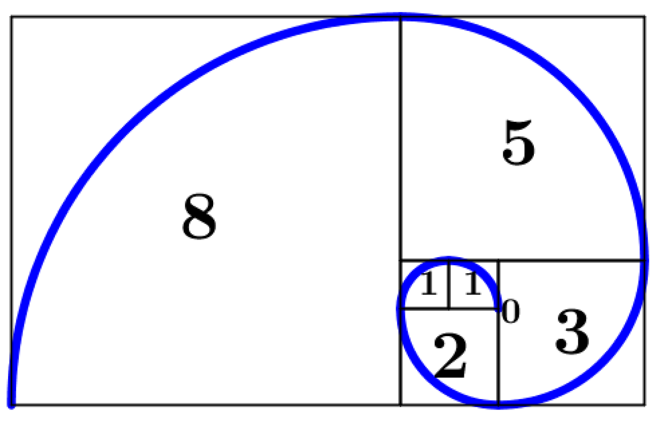
$$\begin{cases} F_0=0, \quad F_1=1 \\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\ge 2 \end{cases}$$

後人寫成數列形式為0,1,1,2,3,5,8,⋯，稱為**費氏數列**(Fibonacci sequence)，參考資料[5]，此數列也表現了自然界生物的許多生長現象，如：鳳梨、向日葵、松果以及鸚鵡螺。此外，具有許多有趣的性質：

1. 黃金分割的比值與特徵根的確認關係。
2. 費氏螺線與一般化的費氏曲線的相似性。

事實上，我們利用遞迴數列的各項為邊作正方形，稱為數列方形，再依序以逆時針排列，由0點出發，不斷在正方形內逆時針作出四分之一的圓弧，連結成一條螺線，稱為費氏螺線，這近似於鸚鵡螺的螺線。

本作品中，我們嘗試將上述二階線性遞迴關係推廣到一般較高階線性遞迴關係的情形。我們發現上兩者雖產生各種不同的變化，但萬變不離其宗又有互補的作用，收穫是豐富且多樣的。例如：相應的曲線有螺線與非螺線之分，並且都可以解釋為大自然的許多圖像。



費氏螺線

研究目的

一、依照費氏螺線的樣式，建構推廣費氏矩形及費氏螺線。
二、探討 k 階齊次線性遞迴關係中係數在何種條件下，形成推廣費氏螺線或非螺線的性質。
三、在 k 階齊次線性遞迴數列中，探討後前項比的極限與其特徵方程式的實根之性質，再論證出形成螺線以及非螺線的充分條件。
四、建構 k 階齊次線性遞迴數列相應的曲線，並且將曲線解釋成大自然的圖像。

研究方法或過程

【**定義1**】給定一數列 $\{a_n\}$，若存在 $k\ (\ge 2)$ 個實數：$c_1, c_2, \cdots, c_k$ ，其中 $c_k \ne 0$，滿足

(i) (**初始條件**) $a_1=1, a_i=0$, 其中 $-(k-2)\le i\le 0$。

(ii) (**遞迴關係**) $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+c_3a_{n-3}+\cdots+c_{k-1}a_{n-k+1}+c_ka_{n-k}$, $n\ge 2$. (1)

則滿足(i)與(ii)式的數列 $\{a_n\}$ 我們叫做 k **階實係數齊次線性遞迴數列**。

(1)式的特徵方程式為 $f(x)=x^k-c_1x^{k-1}-c_2x^{k-2}-c_3x^{k-3}-\cdots-c_{k-1}x-c_k=0.$ (2)

例如：

三階遞迴關係式 $a_n=a_{n-1}+10a_{n-2}+8a_{n-3}$ 的特徵多項式為 $f(x)=x^3-x^2-10x-8=(x-4)(x+1)(x+2)$

因此，數列 $\{a_n\}$ 的一般解為 $a_n=d_1\cdot 4^n+d_2\cdot(-1)^n+d_3\cdot(-2)^n$

本研究針對(1)式中實根探討，係數分兩種情形：

(i) 當 $c_1, c_2, \cdots, c_k>0$ 時，則(2)式恰有一正實根(**笛卡兒符號法則**)，其特徵實根均相異。(**定理4**)

(ii) 當 $c_1<0, c_2>0, c_3<0, c_4>0, \cdots$ 時，則(2)式恰有一負實根，其特徵實根均相異。(**定理7**)

【問題1】若依照費氏螺線的樣式，當推廣 k 階實係數齊次線性遞迴數列時，所產生曲線均為螺線嗎？

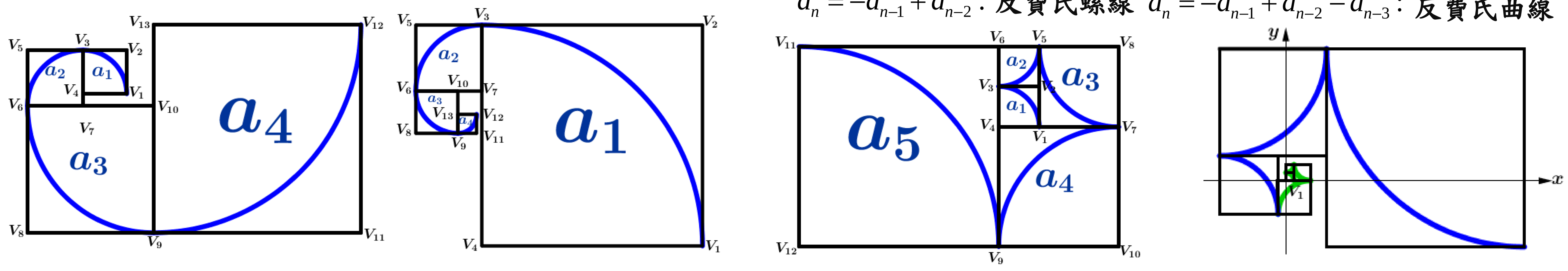
數列曲線： **數列螺線** **數列非螺線**

遞增數列，數列曲線由內而外逆時鐘旋出

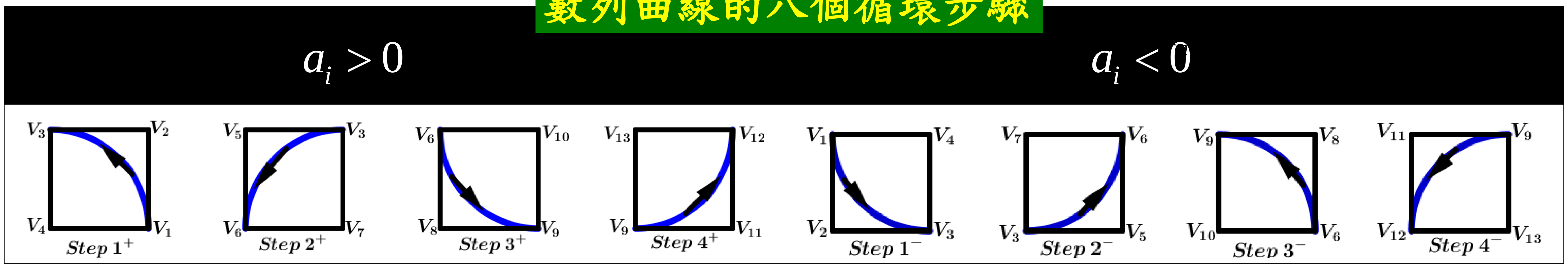
遞減數列，數列曲線由外而內逆時鐘旋入

包含有數列正負相間的曲線及大自然圖像之曲線

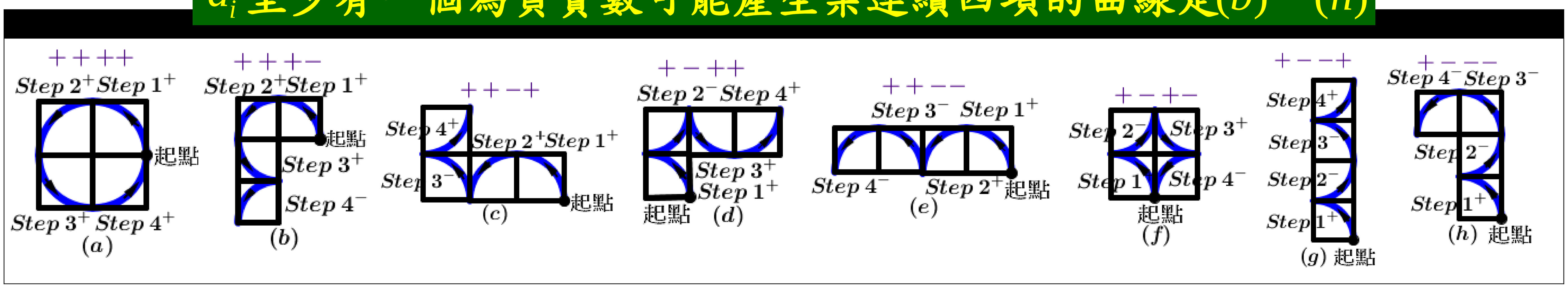
$a_n=-a_{n-1}+a_{n-2}$：**反費氏螺線** $a_n=-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}$：**反費氏曲線**



數列曲線的八個循環步驟



a_i 至少有一個為負實數可能產生某連續四項的曲線是(b) ~ (h)



數列曲線要判斷是否為數列非螺線，我們採取尖點判定法：

若考慮 $a_i\ (i=1,2,3,\cdots,n)$ 至少有一個為負實數，其餘不為零時，會產生四個循環方向，前後步驟正負交錯的情形，則交接處會有尖點產生，因此，此曲線就是數列非螺線。

【定理1】費氏螺線方程式為

$$X(t)=1+\sum_{i=1}^{[t]}\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}\times(-1)^{[\frac{i+1}{2}]}\times(a_i-a_{i-1})+a_{[t]}\cdot\cos\left(\frac{t-1}{2}\pi\right)$$

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{[t]}\frac{1+(-1)^{i}}{2}\times(-1)^{[\frac{i}{2}]}\times(a_i-a_{i-1})+a_{[t]}\cdot\sin\left(\frac{t-1}{2}\pi\right)$$

【定理 2】數列曲線方程式為

$$X(t)=1+\sum_{i=1}^{[t]}\underbrace{\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}}_{\text{決定是否影響}x,y\text{坐標的移動量}}\times\underbrace{(-1)^{[\frac{i+1}{2}]}}_{\text{決定正負}}\times(a_i-a_{i-1})+\left|a_{[t]}\right|\cdot\cos\theta$$

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{[t]}\underbrace{\frac{1+(-1)^{i}}{2}}_{\text{決定是否影響}x,y\text{坐標的移動量}}\times\underbrace{(-1)^{[\frac{i}{2}]}}_{\text{決定正負}}\times(a_i-a_{i-1})+\left|a_{[t]}\right|\cdot\sin\theta$$

，其中實數 $t\geq 1$。

若 $a_{[t]}>0$，則 $\theta=\frac{t-1}{2}\pi$；若 $a_{[t]}<0$，則 $\theta=\frac{t+1}{2}\pi$。

【問題2】 k 階實係數齊次線性遞迴數列之後前項比的極限等於數列的特徵正實根或負實根嗎？
如何用係數找到區分數列曲線的充分條件？

黃金比例 $\phi=\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}\approx 1.618$

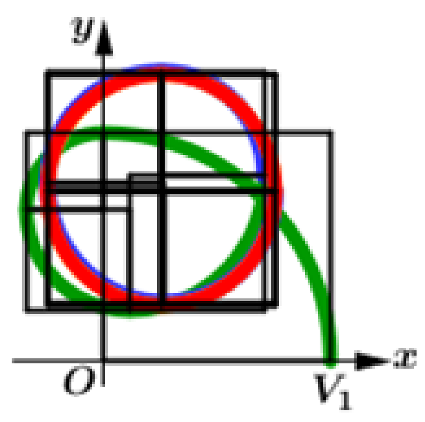
性質	數列各項皆為正 $c_1,c_2,\cdots,c_k>0$ 特徵實根 $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_k$	數列正負相間 $c_1<0,c_2>0,c_3<0,c_4>0,\cdots$ 特徵實根 $\alpha_1\geq\alpha_2\geq\cdots\geq\alpha_k$
唯一實根及後前項比的極限	(i) 數列 $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ 為收斂數列 (定理3) (ii) α_1 為數列的唯一特徵正實根，實根均相異 (定理4) (iii) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha_1$ (定理5)	(i) α_k 為數列的唯一特徵負實根，實根均相異 (定理7) (ii) $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha_k$ (定理8)
區分數列曲線	(i)若 $c_1+c_2+\cdots+c_k>1$ 時，則 $\{a_n\}$ 為遞增數列數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的螺線。 (ii)若 $c_1+c_2+\cdots+c_k=1$ 時，則 $\{a_n\}$ 趨近常數數列 數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的螺線 當 $n\to\infty$ 時，數列螺線會收斂於一圓(極限圓)。 (iii) 若 $0<c_1+c_2+\cdots+c_k<1$ 時，則 $\{a_n\}$ 為遞減數列 數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的螺線 當 $n\to\infty$ 時，數列螺線會旋入至一點(點圓)。 (定理6)	(i) 若 $\|c_1\|+\|c_2\|+\cdots+\|c_k\|>1$ 時，則 數列曲線是由內而外逆時鐘旋出的反費氏曲線。 (ii) 若 $\|c_1\|+\|c_2\|+\cdots+\|c_k\|=1$ 時，則 數列曲線是由內而外逆時鐘旋轉的反費氏曲線 當 $n\to\infty$ 時，數列曲線會收斂於極限反費氏曲線 (iii) 若 $0<\|c_1\|+\|c_2\|+\cdots+\|c_k\|<1$ 時，則 數列曲線是由外而內逆時鐘旋入的反費氏曲線 當 $n\to\infty$ 時，數列曲線會旋入至一點。 (定理9)

【定理 3】(i)若 $f(x)=\prod_{i=1}^{k}(x-\alpha_i)$ ，其中特徵根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 均相異，$|\alpha_1|>|\alpha_i|,\ i=2,3,\cdots,k$ ，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha_1$

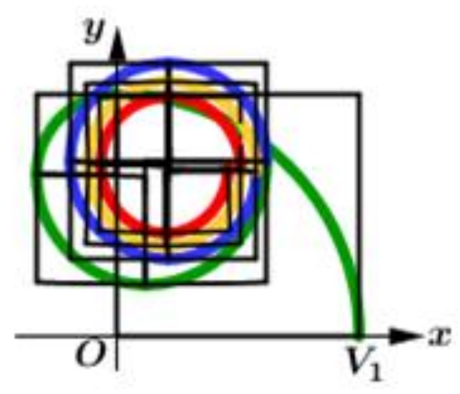
(ii)若 $f(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-\alpha_i)^{p_i}$ ，其中特徵根 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 相異，且 α_i 為 p_i 次重根，則

(a)當 $|\alpha_1|>|\alpha_i|,\ i=2,3,\cdots,m$ 時，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\alpha_1$ 。

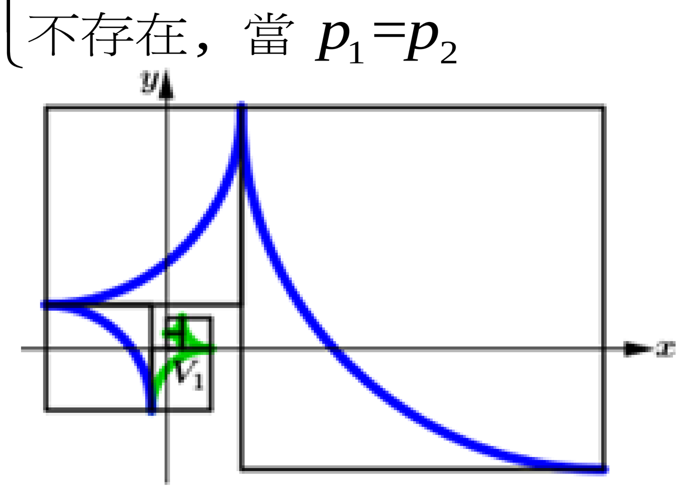
(b)當 $\alpha_1=-\alpha_2>|\alpha_i|,\ i=3,4,\cdots,m$ 時，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\begin{cases}\alpha_1，\text{當 } p_1>p_2\\ \alpha_2，\text{當 } p_1<p_2\\ \text{不存在，當 } p_1=p_2\end{cases}$



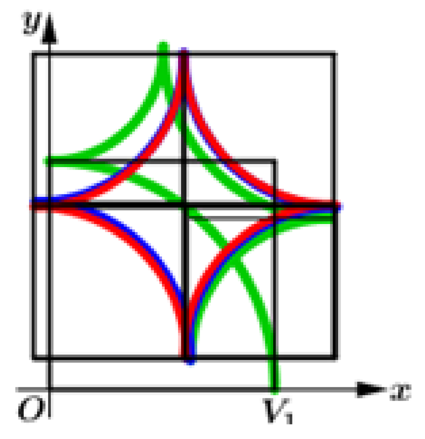
$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}a_{n-2}+\frac{1}{3}a_{n-3}$



$a_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}a_{n-2}+\frac{1}{4}a_{n-3}$



$a_n=-a_{n-1}+a_{n-2}-a_{n-3}$



$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{1}{2}a_{n-2}$

【註】數列為 $a_n=-a_{n-1}+a_{n-2}:a_1=1,a_2=-1,a_3=2,a_4=-3,a_5=5,\cdots$，若此數列都取正號，即費氏數列，有正負相間代表圖形偶數段曲線凹性與費氏螺線相反，顯然是非螺線，為了方便稱為反費氏螺線，推廣至 k 階時，就稱為反費氏曲線

【極限圓的參數式】 正實數 $t\leq n$ ，存在 $t\geq 1$ 使得 $a_{[t]}=a_{[t]+1}=a_{[t]+2}=\cdots$，則極限圓的參數式為

$$X(t)=1+\sum_{i=1}^{[t]}\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}\times(-1)^{[\frac{i+1}{2}]}\times(a_i-a_{i-1})+a_{[t]}\cdot\cos\left(\frac{t-1}{2}\pi\right)$$

$$Y(t)=\sum_{i=1}^{[t]}\frac{1+(-1)^{i}}{2}\times(-1)^{[\frac{i}{2}]}\times(a_i-a_{i-1})+a_{[t]}\cdot\sin\left(\frac{t-1}{2}\pi\right)$$

【一點圓的坐標】 正實數 $t\leq n$，存在 $t\geq 1$ 使得 $a_{[t]}=a_{[t]+1}=a_{[t]+2}=\cdots$，則一點圓的坐標為

$$\left(1+\sum_{i=1}^{[t]}\frac{1+(-1)^{i+1}}{2}\times(-1)^{[\frac{i+1}{2}]}\times(a_i-a_{i-1}),\ \sum_{i=1}^{[t]}\frac{1+(-1)^{i}}{2}\times(-1)^{[\frac{i}{2}]}\times(a_i-a_{i-1})\right).$$

【問題 3】數列曲線可以解釋哪些大自然的圖像呢？

數列至少有一個為負實數且 $c_1,c_2,\cdots,c_k\in\{1,-1\}$

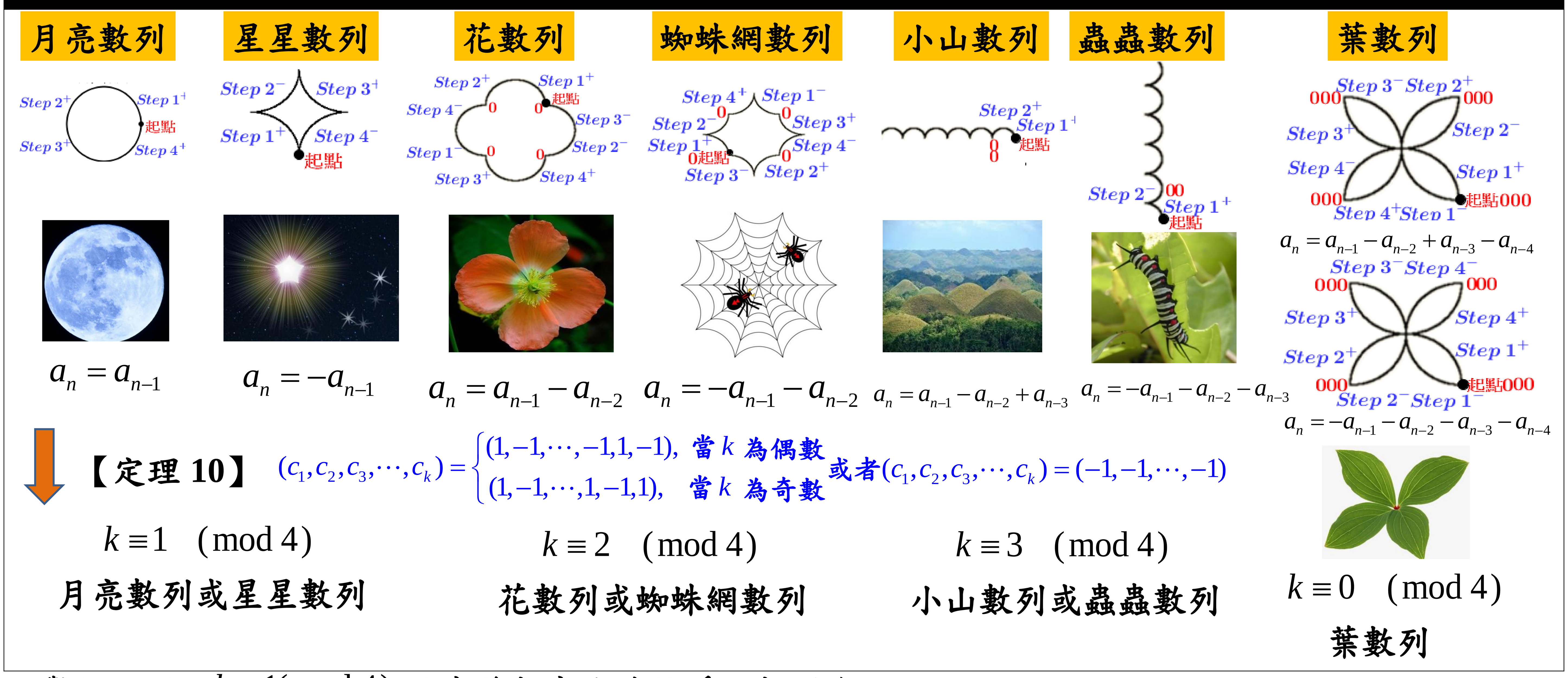
(i) 當 $k\geq 2,\ c_1=1,\ c_2=-1$ 時，則數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零。

(ii) 當 $k\geq 2,\ c_1=-1,\ c_2=-1$ 時，則數列 $\{a_n\}$ 至少有一項是零。

數列曲線必須具有封閉性或對稱性 判別法則

(a) $k(\geq 2)$ 階實係數齊次線性遞迴數列必須至少有一項是零。 (b)數列方形的邊長為1。 (c)要固定的循環步驟。

解釋為大自然的各種圖像



舉例說明：$k\equiv 1 \pmod 4$ 階實係數齊次線性遞迴數列為

當 $k=1$ 時，則 $a_n=a_{n-1}$，代表數列 $\{a_n\}:1,1,1,1,\cdots$ 。

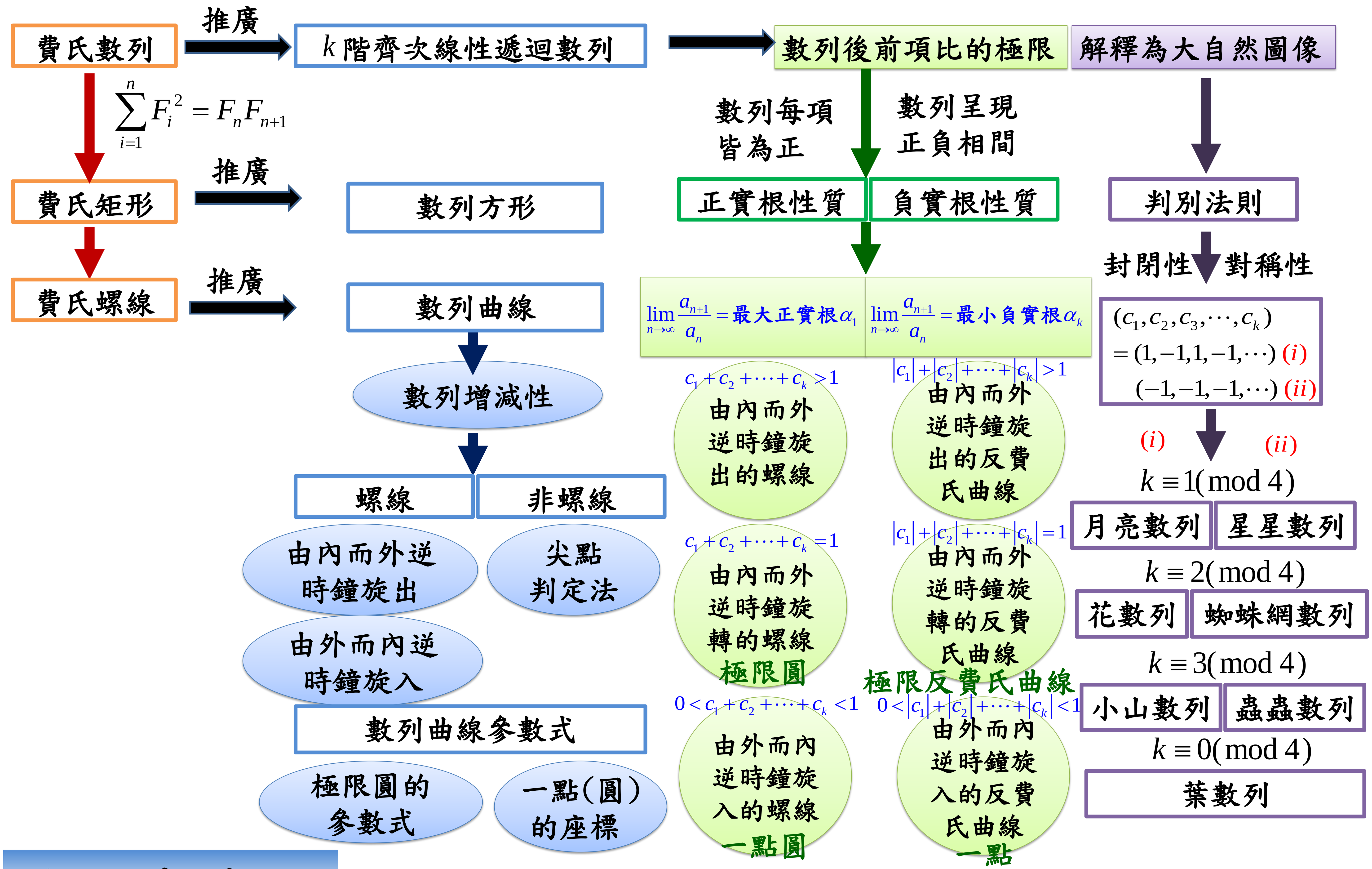
當 $k=5$ 時，則 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}-a_{n-4}+a_{n-5}$，代表數列 $\{a_n\}:1,1,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,\cdots$ 。

當 $k=9$ 時，則 $a_n=a_{n-1}-a_{n-2}+a_{n-3}-a_{n-4}+a_{n-5}-a_{n-6}+a_{n-7}-a_{n-8}+a_{n-9}$ ，代表數列

$$\{a_n\}:1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,0,0,0,0,0,0,0,\cdots$$

以此類推 $k\equiv 1 \pmod 4$ 階實係數齊次線性遞迴數列，即是將每項數列中0的地方加入4的倍數個0。對於其他情形如 $k\equiv 2 \pmod 4$、$k\equiv 3 \pmod 4$ 以及 $k\equiv 0 \pmod 4$ 方法均相同。

研究結果



結論與應用

本研究以費氏矩形及費氏螺線為延伸主體，推廣到一般 k 階齊次線性遞迴數列的情形，建構出的曲線包含螺線與非螺線。我們將數列曲線統整於數列曲線參數式，也探討出如何區分數列螺線以及數列非螺線的充分條件是由 $c_1+c_2+\cdots+c_k$ 的值來決定，進一步分析增減性在幾何圖形上的意義。得到推廣費式螺線外，也建構出偶數段曲線凹性與推廣費氏螺線相反的曲線，我們稱之為反費氏曲線。

大自然的運行中常隱藏費氏螺線如鸚鵡螺，我們也建構出一些具有封閉性或對稱性的數列曲線所呈現之圖像來解釋大自然。特別解釋為月亮、星星、花、蜘蛛網、小山、蟲蟲、及葉數列等等，也期盼這些曲線能在自然界中廣泛的應用。

參考資料

[1] 林福來/譯. C. L. Lin/著 (1982)。**組合數學**。臺北市：國立編譯館主編。

[2] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**，**33**(4)，47-62。

[3] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**，**34**(1)，35-57。

[4] 黃敏晃、方述誠 (2000)。黃金分割比。**科學月刊**，**1**(4)。

[5] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (2007). *The fabulous Fibonacci numbers*. Amherst, N.Y. : Prometheus Books.

[6] Chuan-Chong Chen and Khee-Meng Koh (1992). *Principles and techniques in combinatorics*. Singapore ; River Edge, N.J. : World Scientific.

[7] Claude Levesque (1983). On -th Order Linear Recurrences. Universite Laval, Quebec, Canada.

[8] Merve Ozvatan and Oktay K.Pashaev (2017). Generalized Fibonacci Sequences and Binet-Fibonacci Curves. Department of Mathematics, Izmir Institute of Technology, Izmir 35430, Turkey.

[9] Xiaoshen Wang (2004). A simple proof of Descartes's Rule of Signs.*Amer. Math. Monthly* 111, 525 - 526.