從容應對－利用各種多項式插值法及特定位數性質估計對數值之探討

20724 邱昱筌、20612 吳冠辰、20728 留肇彤

一、前言

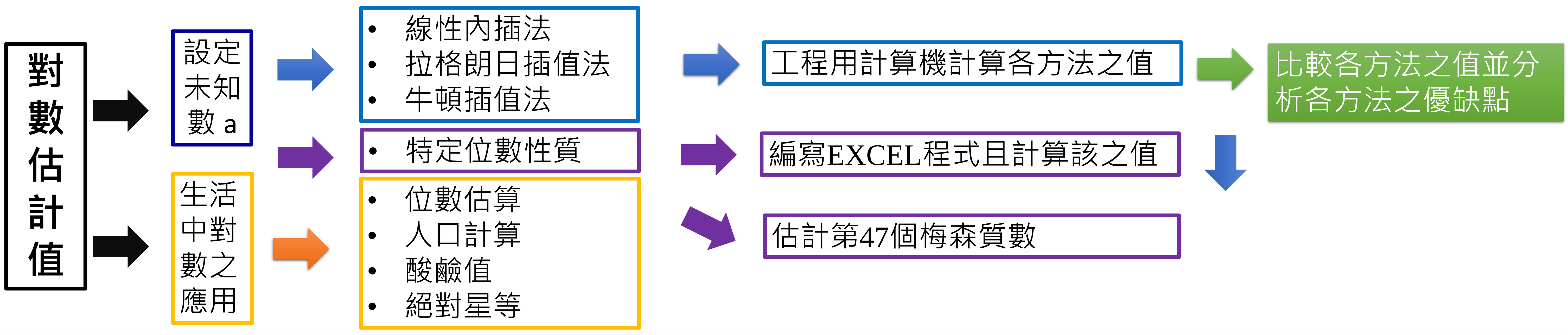
1.研究動機

當我們在學習對數時，閱讀對數的起源來自於巴比倫人的泥板，這是對數想法最早的起源，這於是讓我們好奇，由常用等差數列與等比數列間有某對應關係，數學家就建立對數概念，於是我們想進一步探究，同時利用各種多項式插值法及特定位數性質估計$\log a$值。

2.研究問題

- 利用線性內插法探討$\log a$ 的估計值
- 利用拉格朗日插值法探討$\log a$的估計值
- 利用牛頓插值法探討$\log a$的估計值
- 探討第47個梅森質數的位數
- 利用a^{a^n}的位數探討$\log a$的近似值
- 探討對數的應用

3.研究架構



二、研究過程及方法

1.文獻探討

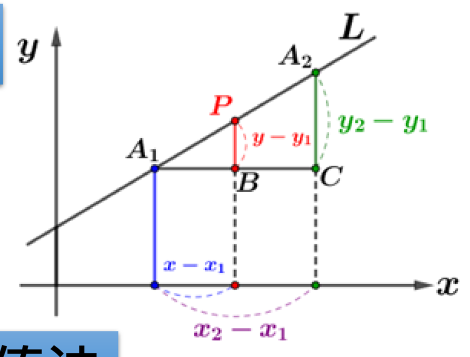
對數的起源來自於巴比倫人的泥板，記載著對數想法最早的起源，上面寫著公差為1的等差數列與公比為2的等比數列，法國數學家**柴凱特**將泥板上的數列分別延伸，**從兩個數列中觀察到等比數列中任意兩個數值相乘的值，恰好等於所對應等差數列數值相加的值**（表一）。

表一：對數的起源

等差數列	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
等比數列	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

2.探討$\log a$ 的估計值

線性內插法

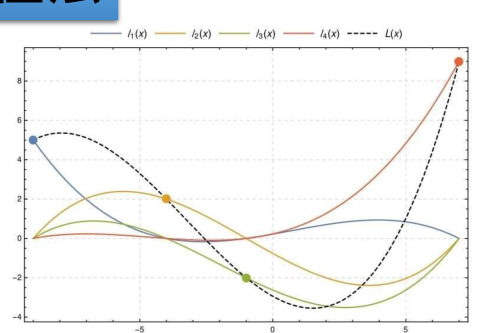


$$y = y_1 + \frac{(x-x_1)(y_2-y_1)}{x_2-x_1} = \frac{y_1(x_2-x_1)+(x-x_1)(y_2-y_1)}{x_2-x_1} = \frac{y_2(x-x_1)-y_1(x-x_2)}{x_2-x_1}$$

利用**線性內插法**得知 $\log\frac{27}{8} = \frac{\log 4\times(\frac{27}{8}-3)-\log 3\times(\frac{27}{8}-4)}{4-3} = 0.5239375$

一階拉格朗日插值多項式為線性內插法

拉格朗日差值法

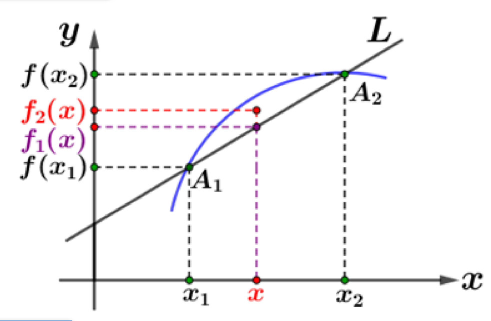


$$f_i(x) = \prod_{i=1,i\neq j}^{n+1}\frac{x-x_i}{x_j-x_i} = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_j)\cdots(x-x_{n+1})}{(x_j-x_1)(x_j-x_2)\cdots(x_j-x_j)\cdots(x_j-x_{n+1})}$$

利用**二階拉格朗日差值法**得知 $\log\frac{27}{8} = 0.5344865808819$ 近似值精確至小數第一位

利用**三階拉格朗日差值法**得知 $\log\frac{27}{8} = 0.528201662947$ 近似值精確至小數第四位

二階牛頓差值法



$$f_2(x) = y_1 + c_1(x-x_1) + c_2(x-x_1)(x-x_2)$$

$$= y_1 + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x-x_1) + \frac{\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2} - \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}}{x_3-x_1}(x-x_1)(x-x_2)$$

利用**二階牛頓差值法**得知 $\log\frac{27}{8} = 0.5280296875$ 近似值精確至小數第三位

特殊位數性質

$$\frac{k-1}{a^n} < \log a < \frac{k}{a^n}$$

表二：特殊位數性質法之探討$\log 2$ 之值

n	k	代入公式	**$\log 2$的估計值**
12	1234	$0.3010<\log 2<0.3013$	**0.301**
13	2467	$0.3010<\log 2<0.3011$	**0.301**
14	4933	$0.30102<\log 2<0.30109$	**0.3010**

表三：特殊位數性質法之探討$\log 3$ 之值

n	k	代入公式	**$\log 3$的估計值**
7	1044	$0.4769<\log 3<0.4774$	**0.477**
8	3131	$0.47706<\log 3<0.47721$	**0.477**
9	9392	$0.47711<\log 3<0.47716$	**0.4771**

3.探討對數的應用

位數估算	人口計算
一個很大或很小的數字，當計算時會是非常複雜。但可以透過對數簡單地估出這個數字的位數和首位數字。	每個地區的人口成長率不太相同，未來的成長率也很難估計，而對數可以利用來推測幾年後可以達成倍數的成長
酸鹼值	**絕對星等**
pH值是用來表現溶液是酸或鹼，其數值是由對該溶液氫離子的莫耳濃度取對數後的值加上負號而成（$pH=-\log[H^+]$），若數值等於7為中性溶液，小於7則為酸性溶液，大於7則為鹼性溶液，數值距離7愈遠的數值則代表該溶液愈酸或鹼	太空中存在著許多閃爍的星星，有明亮又有昏暗，但因每顆星星的位置和本身的發光強度不同，不知是為何導致有所差別，是靠絕對星等公式：$M = m + 5\log\left(\frac{d_0}{d}\right)$ 其中M代表絕對星等、m代表視星等、d 代表距離及d_0設為標準距離單位，約等於32.616光年。

三、結論

對數的概念主要是將加減代替乘除的數學思考，可把需要大量計算乘除、乘方和開方的工作，化繁為簡轉化成加減的方式來處理，對數解決求幾位數就是經典貢獻。本篇利用各種多項式插值法–線性內插法、拉格朗日插值法、牛頓插值法及特定位數性質估計$\log a$值。在各種多項式插值法中線性內插法其實就是一次多項式來表示的插值法，其表示式相當於一階拉格朗日插值多項式及一階牛頓插值法。若再提升計算的階數，則可以提升計算的精確度，其表示式為**k階拉格朗日插值多項式**及**k階牛頓插值法**。

四、文獻資料

- 林倉億（2011）。怎麼算$\log 2$。教育部高中數學學科中心電子報，52（1）。
- 紀筌惟（2017）。對數的故事。科學發展，537（9）。
- 徐正梅（2010）。多項式的插值法。科學教育月刊，482（5）。
- 葉善雲（2016）。對數值估計法則。龍騰數亦優，28（3）。