一、前言

1.研究動機

在數學上，費氏數列是可**由巴斯卡三角形斜排所產生的數列**，參見圖 1，而巴斯卡三角形是一種算術三角形。又費氏數列為k階線性遞迴數列，對於數列與算術三角形間的性質感興趣，於是提出三個問題：**「何種多項式的展開式分離出係數得到一個算術三角形，使得其斜排數列為k階線性遞迴數列呢？」「將費氏數列與巴都萬數列推廣至k階線性遞迴數列的情形為何？是否有算術三角形滿足此數列呢？」**

為了解決這些問題，我們建構三種算術三角形，其中三種算術三角形分別稱為**巴斯卡三角形**、**k 階算術三角形(I)及k階算術三角形(II)**，對應的k階線性遞迴數列分別記作$\{a_n^{(k)}\}$、$\{b_n^{(k)}\}$ 及$\{d_n^{(k)}\}$、$\{c_n^{(k)}\}$。

2.研究目的

一、利用k 次$n(k-1)$項定理建構k階算術三角形(I)，且推廣二項式係數性質。
二、由k階算術三角形(I)來探討k 階線性遞迴數列$\{a_n^{(k)}\}$，並且探討其數列的一般式。
三、由巴斯卡三角形建構k階線性遞迴數列 $\{b_n^{(k)}\}$，並且用二項係數探討其數列的恆等式。
同時探討當改變建構原則建構k階線性遞迴數列$\{d_n^{(k)}\}$。
四、利用多項定理建構k階算術三角形(II)，再由k階算術三角形(II)來探討k階線性遞迴數列$\{c_n^{(k)}\}$並且探討其數列的一般式及推廣巴斯卡定理。
五、透過特徵複數根的性質探討k階線性遞迴數列$\{b_n^{(k)}\}$與$\{c_n^{(k)}\}$間的恆等式。

3.定義與預備定理

【定義1】(二項式定理與巴斯卡三角形)

設n,r為非負整數，且$x+y$為二項式，則 $$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n x^{n-r}y^r \qquad (1)$$

其中C_r^n 為二項式係數，稱(1)式為**二項式定理**。

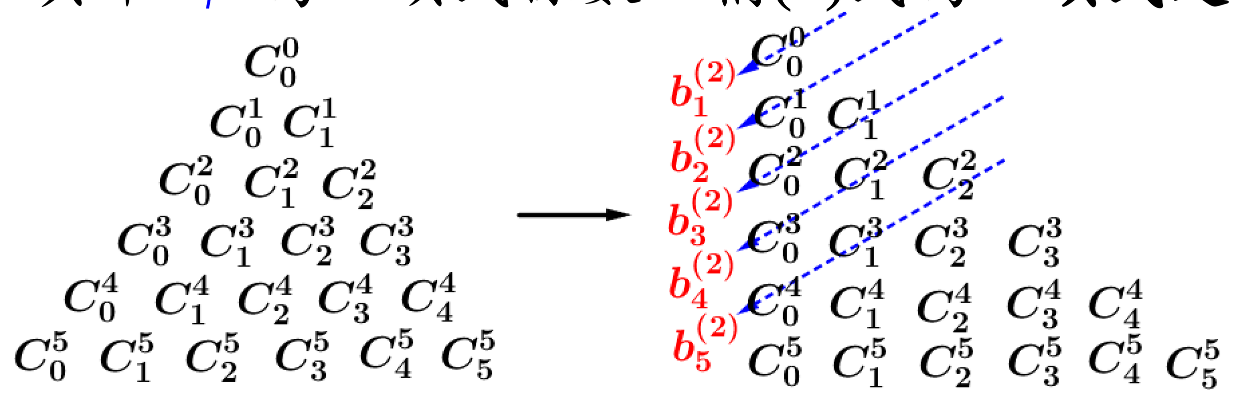

圖1 ：巴斯卡三角形與費氏數列

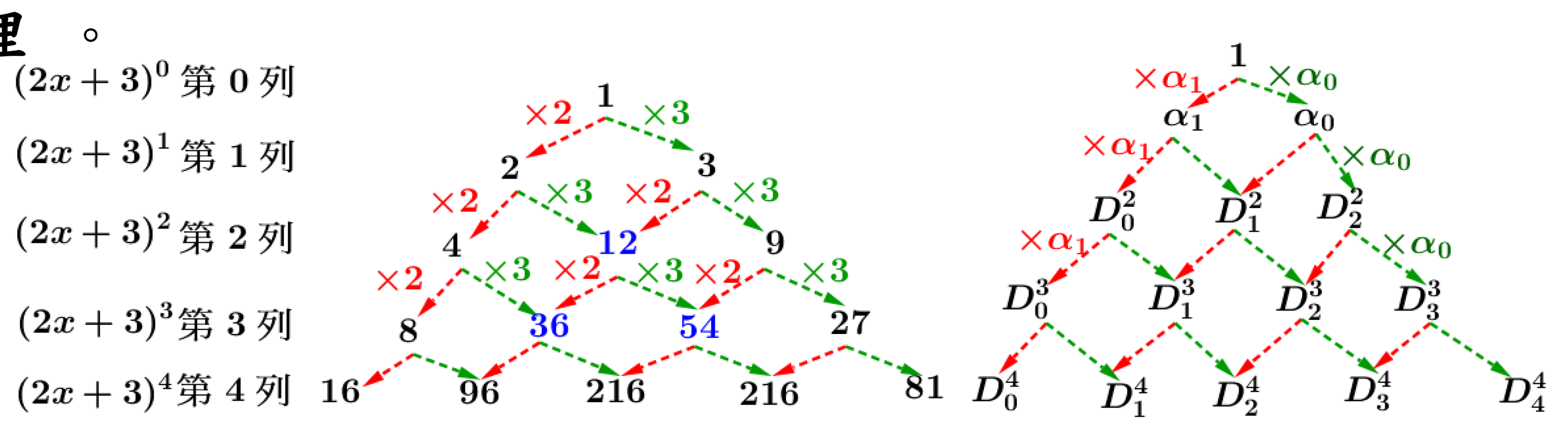

圖2 ：2 階算術三角形(I)

【定義2】($n(k-1)$ 次k 項定理與 k 階算術三角形(I))

設 $\alpha_0,\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1}$為實數且$\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\cdots+\alpha_0$ 為k項式，則

$$(\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\cdots+\alpha_0)^n=\sum_{r=0}^{n(k-1)}D_r^n x^{nk-n-r} \qquad (2)$$

其中k項式係數$D_r^n, 0\le r\le n$，稱(2)式為$n(k-1)$次k項定理。

【預備定理 1】(推廣巴斯卡定理) $\begin{cases} D_r^n=0, & \text{其中 } r<0 \text{ 或 } r>(k-1)n \\ D_r^n=\sum_{i=0}^{k-1}\alpha_i D_{r+i-k+1}^{n-1}, & \text{其中 } 0\le r\le (k-1)n \end{cases}$

2 階算術三角形(I) $\begin{cases} D_r^n=0, & \text{其中 } r<0 \text{ 或 } r>n \\ D_r^n=\alpha_0 D_{r-1}^{n-1}+\alpha_1 D_r^{n-1}, & \text{其中 } 0\le r\le n \end{cases}$

【定義3】給定一數列$\{a_n^{(k)}\}$，若存在$k\,(\ge 2)$個正實數$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k$，其中$\beta_k\ne 0$，滿足兩條件

(i) **(初始條件)** $a_i^{(k)}=v_i$，其中 $0\le i\le k-1$

(ii) **(遞迴關係)** $a_n^{(k)}=\beta_1 a_{n-1}^{(k)}+\beta_2 a_{n-2}^{(k)}+\cdots+\beta_{k-1}a_{n-k+1}^{(k)}+\beta_k a_{n-k}^{(k)}$，$n\ge k$

則滿足(i)與(ii)式的數列$\{a_n^{(k)}\}$稱為 **k 階實係數齊次線性遞迴數列**，內文簡稱 **k 階線性遞迴數列**。

k 階線性遞迴數列

$n(k-1)$次k項定理 → k 階算術三角形(I) → k 階線性遞迴數列 $\{a_n^{(k)}\}$　$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_k\in N$

$$(\alpha_{k-1}x^{k-1}+\alpha_{k-2}x^{k-2}+\cdots+\alpha_0)^n=\sum_{r=0}^{n(k-1)}D_r^n x^{nk-n-r}$$

費氏數列推廣

二項式定理 → 巴斯卡三角形 → 建構原則 → k 階線性遞迴數列 $\{b_n^{(k)}\}$

$$(x+y)^n=\sum_{r=0}^{n}C_r^n x^{n-r}y^r$$

向右移$k-1$項再向上移1項　　$b_n^{(k)}=b_{n-k+1}^{(k)}+b_{n-k}^{(k)}$，$n\ge k$ **(3)**

k 階線性遞迴數列 $\{d_n^{(k)}\}$

向右移h_1項再向上移h_2項　　$d_n^{(k)}=d_{n-k+1}^{(k)}+d_{n-k}^{(k)}$，$n\ge k$

初始條件不同

多項定理 → k階算術三角形(II) → 建構原則 → k 階線性遞迴數列 $\{c_n^{(k)}\}$

【性質 1】

$$(x+y)^{n-1}(x^{k-2}+x^{k-3}y+x^{k-4}y^2+\cdots+y^k)$$

向右移$k-1$項再向上移 1項　　$c_n^{(k)}=c_{n-k+1}^{(k)}+c_{n-k}^{(k)}$，$n\ge k$ **(4)**

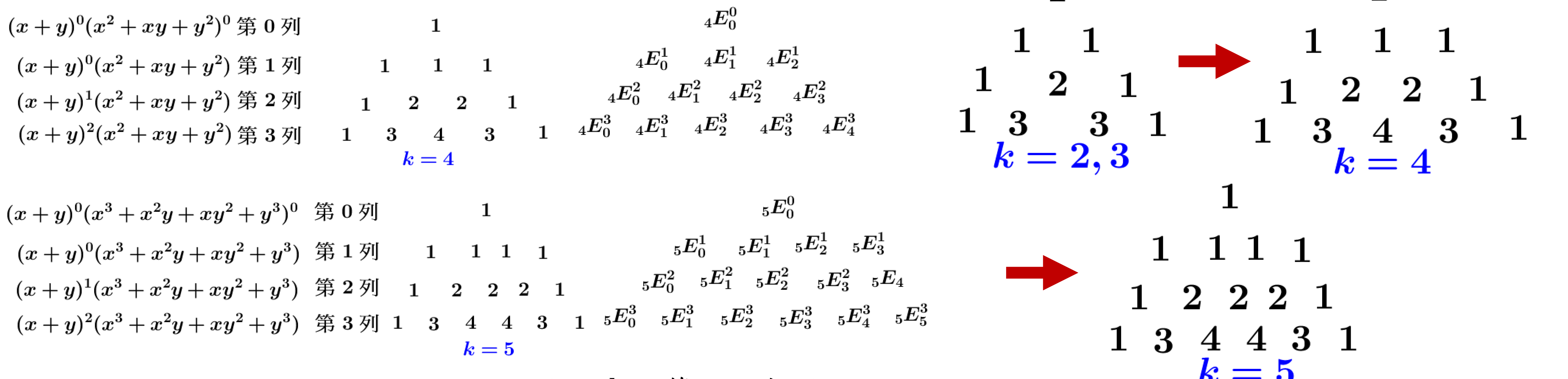

圖3 ：k 階算術三角形(II)

本研究針對(3)式及(4)式中的特徵方程式 $f(x)=x^k-x-1=0$ 之複數根來探討

利用預備定理 1：特徵複數根為相異實根及預備定理 2 ：笛卡兒符號法則來證明，得到定理 15

$$a_n^{(k)}=\lambda_1\gamma_1^n+\lambda_2\gamma_2^n+\lambda_3\gamma_3^n+\cdots+\lambda_k\gamma_k^n$$

(i) 當k為奇數時，則 $f(x)=0$ 的實根為**恰有一個在1與2之間的正實根**，其餘的根為虛根。

(ii) 當k為偶數時，則 $f(x)=0$ 的實根為**各有一個在1與2之間的正實根且在-1與0之間的負實根**，其餘的根為虛根。

二、研究方法或過程

1.探討 k 階算術三角形(I)中的 k 階線性遞迴數列

【定理 1~3】(k階算術三角形(I)中的斜排數列 $\{a_n^{(k)}\}$ 之一般式)

(i) $a_{n+1}^{(k)}=\sum_{r=0}^{n-\lceil n/k\rceil} D_r^{n-r}$ ，其中⌈ ⌉為上高斯符號

(ii) $\{a_n^{(k)}\}$ 為 k 階線性遞迴數列：

$$\begin{cases} a_0^{(k)}=1, a_1^{(k)}=\alpha_k, a_2^{(k)}=\alpha_{k-1}+D_0^k,\cdots,a_k^{(k)}=D_0^k+D_1^{k-1}+\cdots+D_{k-2}^2+\alpha_0 \\ a_{n+1}^{(k)}=\alpha_0 a_n^{(k)}+\alpha_1 a_{n-1}^{(k)}+\cdots+\alpha_k a_{n-k}^{(k)}, n\ge k \end{cases}$$

巴斯卡三角形中的斜排數列為費氏數列

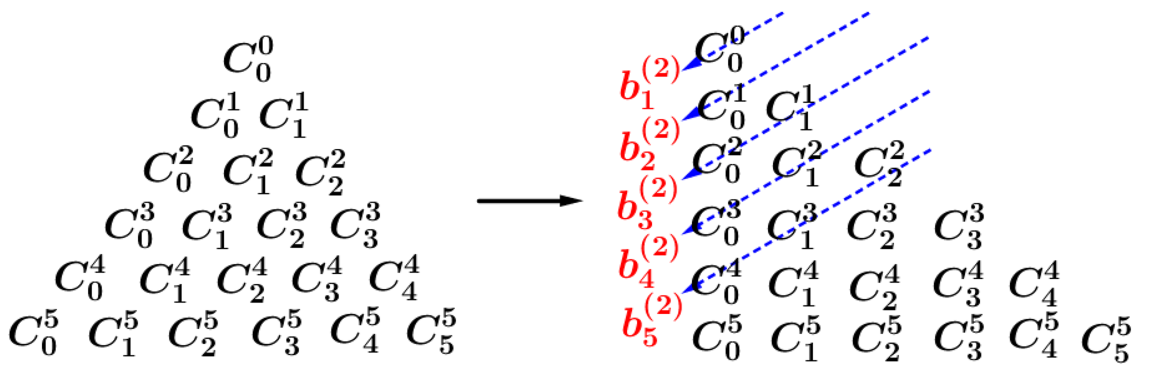

圖1：巴斯卡三角形與費氏數列

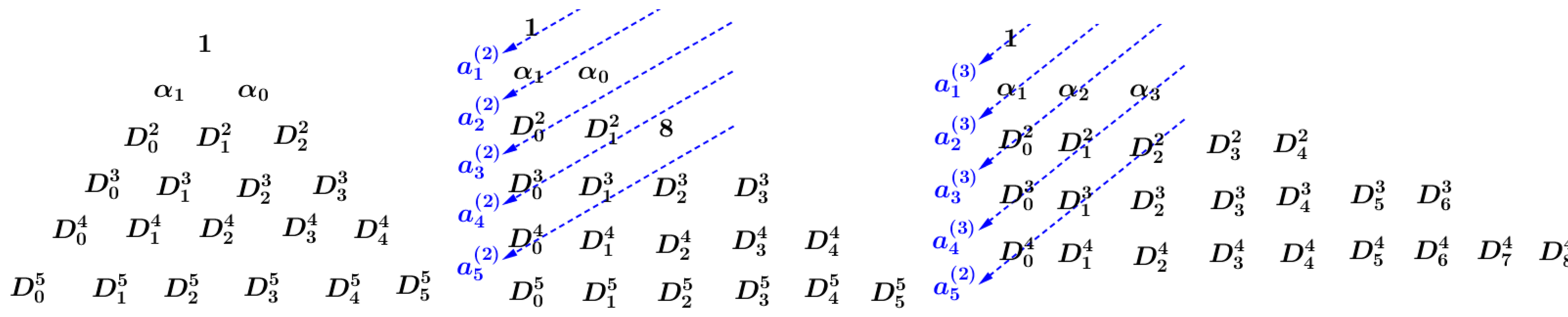

圖4 :k 階算術三角形(I)中的 k 階線性遞迴數列

2.探討巴斯卡三角形中的 k 階線性遞迴數列

巴斯卡三角形中的斜排數列為費氏數列 → **建構原則**：保持向右移1項再向上1項的規律

↓ 推廣：保持向右移 h_1 項再向上 h_2 項的規律

【定理 10】 k 階線性遞迴數列 $\{d_n^{(k)}\}$

h_2 / h_1	1	2	h_2
1	$\begin{cases} d_1^{(2)}=C_0^0, d_2^{(2)}=C_0^1 \\ d_n^{(2)}=d_{n-1}^{(2)}+d_{n-2}^{(2)}, \quad \forall n\ge 3 \end{cases}$	$\begin{cases} d_0^{(3)}=0, d_1^{(3)}=C_0^0, d_2^{(3)}=C_0^1, \\ d_n^{(3)}=d_{n-1}^{(3)}+d_{n-3}^{(3)}, \quad \forall n\ge 3 \end{cases}$	$\begin{cases} d_1^{(h_2+1)}=C_0^0, d_2^{(h_2+1)}=C_0^1 \\ d_n^{(h_2+1)}=d_{n-1}^{(h_2+1)}+d_{n-h_2-1}^{(h_2+1)}, \quad \forall n\ge h_2+2 \end{cases}$
2	$\begin{cases} d_1^{(3)}=C_0^1, d_2^{(3)}=C_1^1, d_3^{(3)}=C_0^2 \\ d_n^{(3)}=d_{n-2}^{(3)}+d_{n-3}^{(3)}, \quad \forall n\ge 4 \end{cases}$	$\begin{cases} d_0^{(5)}=0, d_1^{(5)}=C_0^1, d_2^{(5)}=C_1^1, d_3^{(5)}=C_0^2 \\ d_n^{(5)}=d_{n-2}^{(5)}+d_{n-3}^{(5)}, \quad \forall n\ge 4, n\equiv 0,2 \pmod 2 \\ d_n^{(5)}=d_{n-2}^{(5)}+d_{n-5}^{(5)}, \quad \forall n\ge 5, n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$	$\begin{cases} d_1^{(2h_2+1)}=C_0^1, d_2^{(2h_2+1)}=C_1^1, d_3^{(2h_2+1)}=C_0^2 \\ d_n^{(2h_2+1)}=d_{n-2}^{(2h_2+1)}+d_{n-3}^{(2h_2+1)}, n\equiv 0,2 \pmod 2 \\ d_n^{(2h_2+1)}=d_{n-2}^{(2h_2+1)}+d_{n-2h_2-1}^{(2h_2+1)}, n\equiv 1 \pmod 2 \end{cases}$
⋮	⋮	⋮	⋮
h_1	$\begin{cases} d_1^{(h_1+1)}=C_0^{h_1-1}, \cdots, d_{h_1}^{(h_1+1)}=C_{h_1-1}^{h_1-1} \\ d_n^{(h_1+1)}=d_{n-h_1}^{(h_1+1)}+d_{n-h_1-1}^{(h_1+1)}, \quad \forall n\ge h_1+2 \end{cases}$	$\begin{cases} d_0^{(2h_1+1)}=0, d_1^{(2h_1+1)}=C_0^{h_1-1}, \cdots, d_{h_1}^{(2h_1+1)}=C_{h_1-1}^{h_1-1} \\ d_n^{(2h_1+1)}=d_{n-h_1}^{(2h_1+1)}+d_{n-h_1-1}^{(2h_1+1)}, n\equiv 0,\cdots,h_1 \pmod{h_1} \\ d_n^{(2h_1+1)}=d_{n-h_1}^{(2h_1+1)}+d_{n-2h_1-1}^{(2h_1+1)}, \quad n\equiv 1 \pmod{h_1} \end{cases}$	$\begin{cases} d_1^{(h_1h_2+1)}=C_0^{h_1-1},\cdots,d_{h_1}^{(h_1h_2+1)}=C_{h_1-1}^{h_1-1} \\ d_n^{(h_1h_2+1)}=d_{n-h_1}^{(h_1h_2+1)}+d_{n-h_1-1}^{(h_1h_2+1)}, \ n\equiv 0,\cdots,h_1 \pmod{h_1} \\ d_n^{(h_1h_2+1)}=d_{n-h_1}^{(h_1h_2+1)}+d_{n-h_1h_2-1}^{(h_1h_2+1)}, \quad n\equiv 1 \pmod{h_1} \end{cases}$

建構原則 推廣：保持向右移 $k-1$ 項再向上 1 項的規律 → k 階線性遞迴數列 $\{b_n^{(k)}\}$

【定理 4】(巴斯卡三角形中的費氏數列)

設 C_r^n 為巴斯卡三角形的一般項，若 $b_n^{(2)}$ 為費氏數，則 $b_{n+1}^{(2)}=\sum_{r=0}^{n-\lceil n/2\rceil} C_r^{n-r}$，其中⌈ ⌉為上高斯符號。

【定理 6】(巴斯卡三角形中的巴都萬數列)

設 C_r^n 為巴斯卡三角形的一般項，若 $b_n^{(3)}$ 為巴都萬數，則

(i)當 $n=2m+1$ 時，

$$b_n^{(3)}=\begin{cases} b_1^{(3)}=1, b_3^{(3)}=1, \text{其中 } m<2 \\ \sum_{r=0}^{\lceil \frac{m-1}{3}\rceil} C_{2r}^{m-r+1}, \text{其中 } m\ge 2 \end{cases}$$

(ii)當 $n=2m$ 時，

$$b_n^{(3)}=\begin{cases} b_2^{(3)}=1, b_4^{(3)}=2, \text{其中 } m<2 \\ \sum_{r=0}^{\lceil \frac{m-3}{3}\rceil} C_{2r+1}^{m-r}, \text{其中 } m\ge 2 \end{cases}$$

For Example ：

(i)當 $n=2m+1$ 時，

$b_1^{(3)}=1=C_0^1$、$b_3^{(3)}=1=C_0^2$

$b_5^{(3)}=2=C_0^3+C_2^2$、$b_7^{(3)}=4=C_0^4+C_2^3$、$b_9^{(3)}=7=C_0^5+C_2^4$

$b_{11}^{(3)}=12=C_0^6+C_2^5+C_4^4$、$b_{13}^{(3)}=21=C_0^7+C_2^6+C_4^5$、$b_{15}^{(3)}=37=C_0^8+C_2^7+C_4^6$

(ii)當 $n=2m$ 時

$b_2^{(3)}=1=C_1^1$、$b_4^{(3)}=2=C_1^2$、$b_6^{(3)}=3=C_1^3$

$b_8^{(3)}=5=C_1^4+C_3^3$、$b_{10}^{(3)}=9=C_1^5+C_3^4$、$b_{12}^{(3)}=16=C_1^6+C_3^5$

$b_{14}^{(3)}=28=C_1^7+C_3^6+C_5^5$、$b_{16}^{(3)}=49=C_1^8+C_3^7+C_5^6$

證明

$$b_{n-2}^{(3)}+b_{n-3}^{(3)}=\sum_{r=0}^{\lceil \frac{m-1}{3}\rceil} C_{2r}^{m-r+1}+\sum_{r=0}^{\lceil \frac{m-3}{3}\rceil} C_{2r+1}^{m-r}=b_n^{(3)} \quad (5)$$

一是(5)式中左式展開後兩兩配成**巴斯卡定理**等於(5)式中右式： $b_{10}^{(3)}+b_9^{(3)}=\left(C_1^5+C_0^5\right)+\left(C_3^4+C_2^4\right)=C_1^6+C_3^5=b_{12}^{(3)}$。

二是(5)式中左式展開後兩兩配成**巴斯卡定理**再加上 $C_0^n=C_0^{n-1}=1$ 等於(5)式中右式。

三是(5)式中左式展開後兩兩配成**巴斯卡定理**再加上 $C_n^n=C_{n-1}^{n-1}=1$ 等於(5)式中右式。

四是(5)式中左式展開後兩兩配成**巴斯卡定理**再加上 $C_0^n=C_0^{n-1}=1$ 及 $C_n^n=C_{n-1}^{n-1}=1$ 等於(5)式中右式。

【定理 8】(巴斯卡三角形中的 k 階線性遞迴數列)

設 C_r^n 為巴斯卡三角形的一般項，若 $b_n^{(k)}$ 為 k 階線性遞迴數列，則

(i)當 $n=(k-1)m$ 時，

$$b_n^{(k)}=\begin{cases} b_{k-1}^{(k)}=1, b_{2k-2}^{(k)}=k-1, b_{3k-3}^{(k)}=C_{k-2}^k, \text{其中 } m<k+1 \\ \sum_{r=0}^{\lceil \frac{m-k}{k}\rceil} C_{(k-1)r+k-2}^{m+k-r-3}, \text{其中 } m\ge k+1 \end{cases}$$

(ii)當 $n=(k-1)m+\ell$ $(\ell=1,2,\cdots,k-1)$ 時，

$$b_n^{(k)}=\begin{cases} b_{k-1}^{(k)}=1, b_{2k-2}^{(k)}=k-1, b_{3k-3}^{(k)}=C_{k-2}^k, \text{其中 } m<k+1 \\ \sum_{r=0}^{\lceil \frac{m-\ell}{k}\rceil} C_{(k-1)r+\ell-1}^{m+k-r-2}, \text{其中 } m\ge k+1 \end{cases}$$

【定理 5.7.9】(利用二項式係數探討 k 階線性遞迴數列性質)

費氏數列 $\sum_{i=1}^{n} b_i^{(2)}=\sum_{r=0}^{n+1-\lceil (n+1)/2\rceil} C_r^{n-r+1}-1, \sum_{i=1}^{n} b_{2i-1}^{(2)}=\sum_{r=0}^{2n-1-\lceil (2n-1)/2\rceil} C_r^{2n-r-1}$

巴都萬數列

$$\sum_{i=1}^{n} b_i^{(3)}=b_{n+5}^{(3)}-2=\begin{cases} \sum_{r=0}^{\lceil \frac{m+1}{3}\rceil} C_{2r}^{m-r+1}-2, \text{其中 } n=2m+1, m\ge 2 \\ \sum_{r=0}^{\lceil \frac{m-1}{3}\rceil} C_{2r+1}^{m-r}-2, \text{其中 } n=2m, m\ge 2 \end{cases}$$

→ **推廣** $\sum_{i=1}^{n} b_i^{(k)}=\sum_{i=2}^{k}(b_{n+i}^{(k)}-b_i^{(k)})$

3.探討k階算術三角形(II)中的k階線性遞迴數列

【定理 11】(k階算術三角形(II)中的一般項性質)

$$ {}_kE_0^n = C_0^{n-1} = {}_kE_{n+k-3}^n,\ {}_kE_1^n = C_1^n = {}_kE_{n+k-4}^n,\ {}_kE_r^n = \sum_{i=r-k+2}^{r} C_i^{n-1}\ (k-2 \le r \le n+k-3) $$

【定理 12】(推廣巴斯卡定理) ${}_kE_r^n = {}_kE_{r-1}^{n-1} + {}_kE_r^{n-1}$

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 \\
 & C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 & \\
C_0^4 & C_1^4 & C_2^4 & C_3^4 & C_4^4 & & \\
\hline
{}_4E_0^5 & {}_4E_1^5 & {}_4E_2^5 & {}_4E_3^5 & {}_4E_4^5 & {}_4E_5^5 & {}_4E_6^5
\end{array}
+
\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \\
 & C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & \\
C_0^3 & C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 & & \\
\hline
{}_4E_0^4 & {}_4E_1^4 & {}_4E_2^4 & {}_4E_3^4 & {}_4E_4^4 & {}_4E_5^4
\end{array}
+
$$

【定理 13~14】(用${}_kE_r^n$表示k階線性遞迴數列的一般式)$n=(k-1)m+\ell$

$$
c_1^{(k)} = \cdots = c_k^{(k)} = 1,\ c_n^{(k)} = c_{(k-1)m+\ell}^{(k)} =
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-\ell}{k}\right]} {}_kE_{(k-1)i+\ell-1}^{m-i+1}, & \text{其中 } \ell \ne 0,\ m \ge 2 \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-k}{k}\right]} {}_kE_{(k-1)i+k-2}^{m-i}, & \text{其中 } \ell = 0,\ m \ge 2
\end{cases}
$$

$$
c_1^{(4)} = c_2^{(4)} = c_3^{(4)} = c_4^{(4)} = 1,\quad
c_n^{(4)} = c_{3m+\ell}^{(4)} =
\begin{cases}
\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-\ell}{4}\right]} {}_4E_{3i+\ell-1}^{m-i+1}, & \text{其中 } \ell \ne 0,\ m \ge 2 \\
\displaystyle\sum_{i=0}^{\left[\frac{m-k}{4}\right]} {}_4E_{3i+k-2}^{m-i}, & \text{其中 } \ell = 0,\ m \ge 2
\end{cases}
$$

4.探討k階線性遞迴數列$\{b_n^{(k)}\}$與$\{c_n^{(k)}\}$的性質

【定理 16】(費氏數列與二項式係數的性質)

$$ \sum_{i=0}^{n} C_i^n b_{m+i}^{(2)} = b_{m+2n}^{(2)} $$

【定理 17-18】(k 階線性遞迴數列與二項式係數的性質)

巴都萬數列 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_i^n c_{m+i}^{(3)} = c_{m+3n}^{(3)}$ $\xrightarrow{\text{推廣}}$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_i^n c_{m+i}^{(k)} = c_{m+kn}^{(k)}$

k 階線性遞迴數列

當k為奇數時,特徵根是一個實根與 $k-1$個虛根;當k為偶數時,特徵根是二個實根與$k-2$個虛根。

由預備定理 3知 $a_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \gamma_i^n$ 得

$$ \sum_{i=0}^{n} C_i^n c_{m+i}^{(k)} = \sum_{i=0}^{n}\left(C_i^n \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \gamma_i^{m+i}\right) = \lambda_1\gamma_1^m \sum_{i=0}^{n} C_i^n \gamma_1^i + \cdots + \lambda_k \gamma_k^m \sum_{i=0}^{n} C_i^n \gamma_k^i $$

$$ = \lambda_1\gamma_1^m (1+\gamma_1)^n + \cdots + \lambda_k (1+\gamma_k)^n = \lambda_1\gamma_1^m (\gamma_1^k)^n + \cdots + \lambda_k \gamma_k^m (\gamma_k^k)^n $$

$$ \gamma_i^k - \gamma_i - 1 = 0 \Rightarrow \gamma_i^k = \gamma_i + 1 $$

$$ = \lambda_1\gamma_1^{m+kn} + \lambda_2\gamma_2^{m+kn} + \cdots + \lambda_k\gamma_k^{m+kn} = c_{m+kn}^{(k)} c_n^{(k)} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \gamma_i^n $$

三、研究結果

k 階線性遞迴數列

$n(k-1)$次k項定理 | k 階算術三角形(I) → k 階線性遞迴數列 $\{a_n^{(k)}\}$ $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k \in N$

$$ (\alpha_{k-1}x^{k-1} + \alpha_{k-2}x^{k-2} + \cdots + \alpha_0)^n = \sum_{r=0}^{n(k-1)} D_r^n x^{nk-n-r} $$

二項式定理 | 巴斯卡三角形 | 建構原則 —費氏數列推廣→ k 階線性遞迴數列 $\{b_n^{(k)}\}$

$$ (x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n x^{n-r} y^r $$

向右移$k-1$項再向上移1 項 $b_n^{(k)} = b_{n-k+1}^{(k)} + b_{n-k}^{(k)},\ n \ge k$

向右移h項再向上移h項 → k階線性遞迴數列 $\{d_n^{(k)}\}$ $d_n^{(k)} = d_{n-k+1}^{(k)} + d_{n-k}^{(k)},\ n \ge k$

初始條件不同

多項定理 | k階算術三角形(II) | 建構原則 → k 階線性遞迴數列 $\{c_n^{(k)}\}$

$(x+y)^{n-1}(x^{k-2} + x^{k-3}y + x^{k-4}y^2 + \cdots + y^k)$ 向右移$k-1$項再向上移 1項 $c_n^{(k)} = c_{n-k+1}^{(k)} + c_{n-k}^{(k)},\ n \ge k$ (4)

k 階線性遞迴數列$\{b_n^{(k)}\}$ 及$\{c_n^{(k)}\}$與二項式係數的性質 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} C_i^n c_{m+i}^{(k)} = c_{m+kn}^{(k)}$

三、結論與未來展望

1.結論

(i)考慮 $n(k-1)$次k項定理中的斜排數列為 k 階線性遞迴數列,並非是 **k 項式定理** (Multinomial theorem) 。

(ii)透過二項式定理及多項式:$(x+y)^{n-1}(x^{k-2} + x^{k-3}y + x^{k-4}y^2 + \cdots + y^k)$來推導出兩種算術三角形: 巴斯卡三角形及$k$ 階算術三角形(II),建構出數列 $\{b_n^{(k)}\}$與$\{c_n^{(k)}\}$。

(iii)改變巴斯卡三角形的建構原則,建構出數列 $\{d_n^{(k)}\}$。

(iv) 數列$\{b_n^{(k)}\}$、$\{c_n^{(k)}\}$與二項式係數間聯性質。

$$ (x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} \frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!} \prod_{i=1}^{k} x_i^{n_i} $$

2.未來展望

(i)考慮 $n(k-1)$ 次k項定理使得在算術三角形中的斜排數列為 k階線性遞迴數列,這k項定理是否是”唯一“呢?值得仔細思考及探討。 (ii)嚴謹論證 k 階線性遞迴數列 $\{d_n^{(k)}\}$的深入探討。

(iii) 研發 k 階線性遞迴數列 $\{b_n^{(k)}\}$、$\{c_n^{(k)}\}$與二項式係數間聯性質。

四、參考文獻資料

[1] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**,**33**(4),47-62。

[2] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**,**34**(1),35-57。

[3] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (2007). ***The fabulous Fibonacci numbers***. Amherst, N.Y. : Prometheus Books.

[4] Chuan-Chong Chen and Khee-Meng Koh (1992). *Principles and techniques in combinatorics*. Singapore ; River Edge, N.J. : World Scientific.

[5] Xiaoshen Wang (2004). A simple proof of Descartes's Rule of Signs.*Amer. Math. Monthly* 111, 525 – 526.