一、前言

1.研究動機

閱讀科學研習月刊中「森棚教官的數學題」的一道數學問題，參考文獻資料[4]，如下：

「你可以找到多少組正整數對(a,b)，讓a^2-5是b的倍數，b^2-5是 a 的倍數？」

文章中提到的解$(a,b)=(4,11)$，也可增加其解$(a,b)=(11,29)$，即 $\begin{cases} 4^2-5=11=11\times1 \\ 11^2-5=116=4\times29 \end{cases}$ 。

美妙地$4,11,29$為**盧卡斯數列** (Lucas squence)：$\begin{cases} a_0^{(2)}=2,\ a_1^{(2)}=1 \\ a_n^{(2)}=a_{n-1}^{(2)}+a_{n-2}^{(2)},\ \forall n\geq2 \end{cases}$ 第三項、第五項及第七項(奇數項)，因而可猜測盧卡斯數列中奇數項均滿足其問題的解，所以原問題可用數列$a_{n-2}^{(2)},a_n^{(2)},a_{n+2}^{(2)}$來表示，即

$$\left(a_n^{(2)}\right)^2-5=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)} \tag{1}$$

考慮更一般的 k 階線性遞迴數列來做探討，給定非零整數 ℓ 且正整數$t\ (1\leq t\leq n)$，將(1)式改為(2)式：

$$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-t}^{(2)}\times a_{n+t}^{(2)}$$，也可改為行列式形式：$\ell=\begin{vmatrix} a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)} \\ a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)} \end{vmatrix}$ (2)

$t=1$
費氏數列中的二階Cassini恆等式

推廣

k**階線性遞迴數列**$\left\{a_n^{(k)}\right\}$

$$\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell=a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)} \tag{3}$$

特徵複數根性質
或行列式性質求 ℓ

推廣

k**階線性遞迴數列**$\left\{b_n^{(k)}\right\}$ **k 階Cassini恆等式**

$t=1$

$$\ell=\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & b_{n+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_n^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} \end{vmatrix}=\begin{cases} (c_k)^{n-k+1}, \text{其中}k\text{為奇數} \\ (-c_k)^{n-k+1}, \text{其中}k\text{為偶數} \end{cases} \tag{4}$$

2.研究目的

一、探討2階線性遞迴數列滿足原問題(1)式的解之條件，探討其性質。
二、探討2階線性遞迴數列滿足(2)式的解之條件，探討其性質。
三、推廣至k階線性遞迴數列滿足(3)式的解之條件，探討其性質。
四、推廣至k階線性遞迴數列滿足(4)式的解之條件，探討其性質。
五、利用數列的一般式及Vandermonde行列式來探討兩種k 階線性遞迴數列間的恆等式或不等式。

3.定義與預備定理

【定義1】(k **階整係數齊次線性遞迴數列**，參考文獻資料[2] [3])

給定一數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$，若存在$k\ (\geq2)$個整數$c_1,c_2,\cdots,c_k$，其中$c_k\neq0$，滿足兩條件

(i) **(初始條件)** $a_i^{(k)}=\gamma_i$，其中 $i=0,1,2,\cdots,k-1$ 且$\gamma_i\in R$ (5)

(ii) **(遞迴關係)** $a_n^{(k)}=c_1a_{n-1}^{(k)}+c_2a_{n-2}^{(k)}+c_3a_{n-3}^{(k)}+\cdots+c_ka_{n-k}^{(k)}$，$n\geq2$

則滿足(i)與(ii)式的數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$，稱為 k **階整係數齊次線性遞迴數列**，內文簡稱 k **階線性遞迴數列**。

盧卡斯數列

	$a_0^{(2)}$	$a_1^{(2)}$	$a_2^{(2)}$	$a_3^{(2)}$	$a_4^{(2)}$	$a_5^{(2)}$	$a_6^{(2)}$	$a_7^{(2)}$	$a_8^{(2)}$	$a_9^{(2)}$	$a_{10}^{(2)}$	$a_{11}^{(2)}$	$a_{12}^{(2)}$	$a_{13}^{(2)}$	$a_{14}^{(2)}$	$a_{15}^{(2)}$
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364

【定義2】(k **階整係數齊次線性遞迴數列**，參考文獻資料[2] [3])

將**定義1的初始條件改為** $b_1^{(k)}=1,b_i^{(k)}=0$，其中 $i=0,-1,-2,\cdots,-(k-2)$，此數列為k階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$

費氏數列

	$b_0^{(2)}$	$b_1^{(2)}$	$b_2^{(2)}$	$b_3^{(2)}$	$b_4^{(2)}$	$b_5^{(2)}$	$b_6^{(2)}$	$b_7^{(2)}$	$b_8^{(2)}$	$b_9^{(2)}$	$b_{10}^{(2)}$	$b_{11}^{(2)}$	$b_{12}^{(2)}$	$b_{13}^{(2)}$	$b_{14}^{(2)}$	$b_{15}^{(2)}$
n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
b_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

特徵複數根性質

【預備定理 1~2】(特徵複數根性質，參考文獻資料[2] [3]))

特徵複數根	相異實根	相等實根
一般式	$a_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}d_i\alpha_i^n$	$a_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{m}\left(d_{i1}+nd_{i2}+n^2d_{i3}+\cdots+n^{p_i-1}d_{ip_i}\right)\alpha_i^n$
$d_1=d_2=\cdots=d_k=1$	$a_0^{(k)}=k,a_1^{(k)}=c_1,a_2^{(k)}=c_1^2+2c_2$	$a_0^{(2)}=1,\ a_1^{(2)}=c_1,a_2^{(2)}=-3c_2$

盧卡斯數列 $\begin{cases} a_0^{(2)}=2,\ a_1^{(2)}=1 \\ a_n^{(2)}=a_{n-1}^{(2)}+a_{n-2}^{(2)},\ \forall n\geq2 \end{cases}$ **一般式**：$a_n^{(2)}=d_1\alpha_1^n+d_2\alpha_2^n\Rightarrow\begin{cases} a_0^{(2)}=d_1\alpha_1^0+d_2\alpha_2^0=0 \\ a_1^{(2)}=d_1\alpha_1^1+d_2\alpha_2^1=1 \end{cases}$ **解得** $d_1=d_2=1$

【預備定理 3】(**范德蒙行列式**，Vandermonde determinant，參考文獻資料[2]與[3])

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leq j<i\leq n}(x_i-x_j)$$

二、研究方法或過程

1.探討2階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$

【定理 1】(盧卡斯數列中的奇數項滿足(1)式問題的解)

設$\left\{a_n^{(2)}\right\}$為盧卡斯數列中的奇數項之數列，則$\left(a_n^{(2)}\right)^2-5=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$。

【定理 2】(盧卡斯數列中的偶數項滿足(1)式問題的解)

設$\left\{a_n^{(2)}\right\}$為盧卡斯數列中的偶數項之數列，則$\left(a_n^{(2)}\right)^2-(-5)=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$。

盧卡斯數列

奇數項 $\ell=5$

偶數項 $\ell=-5$

2.利用特徵複數根性質來探討2階線性遞迴數列 $\left\{a_n^{(2)}\right\}$

特徵複數根性質：特徵相異實根或共軛虛根探討滿足(2)式之解，特別取 $a_n^{(2)}=\alpha_1^n+\alpha_2^n$ 來協助論證

【定理 3】 $\ell=2(-c_2)^n-(-c_2)^{n-t}a_{2t}^{(2)}$

(i)當 $c_2=1$ 且 n 為奇數時，$\ell=\begin{cases}-2-a_{2t}^{(2)}，其中\ t\ 為奇數\\-2+a_{2t}^{(2)}，其中\ t\ 為偶數\end{cases}$　(ii)當 $c_2=1$ 且 n 為偶數時，$\ell=\begin{cases}2+a_{2t}^{(2)}，其中\ t\ 為奇數\\2-a_{2t}^{(2)}，其中\ t\ 為偶數\end{cases}$

(iii)當 $c_2=-1$ 時，$\ell=2-a_{2t}^{(2)}$

(i) **For Example**：$\left\{a_n^{(2)}\right\}:a_n^{(2)}=2a_{n-1}^{(2)}+a_{n-2}^{(2)}$ 滿足 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$ 得到 $\ell=-2+a_4^{(2)}=32$

當 $n=5$ 時，$\left(a_5^{(2)}\right)^2-\ell=a_3^{(2)}\times a_7^{(2)}\Leftrightarrow 82^2-32=14\times 478$

特徵複數根性質：特徵二重實根探討滿足(2)式之解，特別取 $a_n^{(2)}=(1+n)\alpha^n$ 來協助論證

【性質 1】(二階線性遞迴數列中的二階Cassini恆等式延伸性質) $\ell=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)}\\a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=t^2\alpha^{2n}$

【定理 4】 $\ell=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+t}^{(2)}\\a_{n-t}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=t^2\alpha^{2n}=(-c_2)^n t^2$

當 $c_2=-1$ 時，$\ell=t^2$

For Example：$\left\{a_n^{(2)}\right\}:a_n^{(2)}=2a_{n-1}^{(2)}-a_{n-2}^{(2)}$ 滿足 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$ 得到 當 $t=2,n=3$ 時，

$\left(a_3^{(2)}\right)^2-\ell=a_1^{(2)}\times a_5^{(2)}\Leftrightarrow 4^2-4=2\times 6$

For Example：$\left\{a_n^{(2)}\right\}:a_n^{(2)}=-2a_{n-1}^{(2)}-a_{n-2}^{(2)}$ 滿足 $\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-2}^{(2)}\times a_{n+2}^{(2)}$ 得到 當 $t=2,n=3$ 時，

$\left(a_3^{(2)}\right)^2-\ell=a_1^{(2)}\times a_5^{(2)}\Leftrightarrow(-4)^2-4=(-2)\times(-6)$

數列滿足(2)式中 $t=1$ 之解

【性質 2、定理 5】(二階線性遞迴數列中的二階Cassini恆等式) $\ell=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=(-1)^n c_2^{n-1}(c_1^2+4c_2)$

$t=1$

(i)當 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 時，$\ell=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=\alpha^{2n}=(-1)^n c_2^n$　(ii)當 $\alpha_1=\alpha_2=\alpha$ 且 $c_2=-1$ 時，$\ell=\begin{vmatrix}a_n^{(2)} & a_{n+1}^{(2)}\\a_{n-1}^{(2)} & a_n^{(2)}\end{vmatrix}=1,c_1=\pm 2$

3.利用特徵複數根性質來探討 k 階線性遞迴數列 $\left\{a_n^{(k)}\right\}$

特徵複數根性質：特徵相異 k 實根或相異 p 實根及 $\dfrac{k-p}{2}$ 組共軛虛根探討滿足(3)式之解，取 $a_n^{(k)}=\sum_{i=1}^{k}\alpha_i^n$ 來協助論證

【定理 6.9.】

(i) $\ell=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-t}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$ (ii)當 $t=1$ 時，$\ell=2\sum_{1\le i<j\le k}\left(\alpha_i\alpha_j\right)^n-\sum_{1\le i<j\le k}\left[\left(\alpha_i\alpha_j\right)^{n-1}\left(\alpha_i^2+\alpha_j^2\right)\right]$ **(6)**

For Example：取四個特徵相異實根為 $\alpha_1=3,\alpha_2=2,\alpha_3=1,\alpha_4=-1$ 為例

$a_n^{(4)}=5a_{n-1}^{(4)}-5a_{n-2}^{(4)}-5a_{n-3}^{(4)}+6a_{n-4}^{(4)}$，當 $n=2$ 時，代入(6)式得 $\ell=50$ 滿足 $\left(a_2^{(4)}\right)^2-\ell=a_1^{(4)}\times a_3^{(4)}\Leftrightarrow 15^2-50=5\times 35$

特徵複數根性質：特徵 $k-m$ 個相異實根及 m 重根滿足(3)式之解

【性質 3】(3階線性遞迴數列中的3階Cassini恆等式延伸性質) $\ell=\begin{vmatrix}a_n^{(3)} & a_{n+t}^{(3)}\\a_{n-t}^{(3)} & a_n^{(3)}\end{vmatrix}=t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}$

【定理 7】(特徵三重實根的3階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

(i) $\ell=t^2\left(-t^2+2n^2+2n-1\right)\alpha^{2n}\ (3\alpha^2=-c_2)$　(ii)當 $t=1$ 時，$\ell=\left(2n^2+2n-2\right)\alpha^{2n}\ (3\alpha^2=-c_2)$

For Example： 取 $\alpha=1$，得 $a_n^{(3)}=3a_{n-1}^{(3)}-3a_{n-2}^{(3)}+a_{n-3}^{(3)}$。當 $n=6$ 時，$\ell=82$ 滿足 $\left(a_n^{(3)}\right)^2-\ell=a_{n-1}^{(3)}\times a_{n+1}^{(3)}$ 得到

$\left(a_6^{(3)}\right)^2-\ell=a_5^{(3)}\times a_7^{(3)}\Leftrightarrow 43^2-82=31\times 57$

【定理 10】(特徵 k 重實根的 k 階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

若 $f_k^{(k)}(n)=\left(1+n+\cdots+n^{k-1}\right)^2$

(i) $\ell=\left[f_k^{(k)}(n)-f_k^{(k)}(n-t)f_k^{(k)}(n+t)\right]\alpha^{2n}\ (\alpha^k=-c_2)$　(ii)當 $t=1$ 時，$\ell=\left[f_k^{(k)}(n)-f_k^{(k)}(n-1)f_k^{(k)}(n+1)\right]\alpha^{2n}\ (\alpha^k=-c_2)$

For Example：取 $\alpha=1$，得 $a_n^{(4)}=4a_{n-1}^{(4)}-6a_{n-2}^{(4)}+4a_{n-3}^{(4)}-a_{n-4}^{(4)}$

當 $n=4$ 時，$\ell=985$ 滿足 $\left(a_4^{(4)}\right)^2-\ell=a_3^{(4)}\times a_5^{(4)}\Leftrightarrow 85^2-985=40\times 156$

【定理 8】(特徵二重實根的3階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

(i) $\ell=t^2\alpha_1^{2n}+2\left(1+n\right)\alpha_1^n\alpha_2^n-(1+n)\alpha_1^{n-1}\alpha_2^{n-1}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+t^2\alpha_1^2-t\alpha_2^2)$ (ii)當 $t=1$ 時，$\ell=\alpha_1^{2n}+2\left(1+n\right)\alpha_1^n\alpha_2^n-2(1+n)\alpha_1^{n+1}\alpha_2^{n-1}$

【定理 11】(特徵 $k-m$ 個相異實根及 m 重根的 k 階線性遞迴數列滿足(3)式之解)

若 $f_m^{(k)}(n)=\left(1+n+\cdots+n^{m-1}\right)^2$

(i) $\ell=f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n-\left(f_m^{(k)}(n-t)\alpha_1^{n-t}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\cdot\left(f_m^{(k)}(n+t)\alpha_1^{n+t}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n+1}\right)$

(ii)當 $t=1$ 時，$\ell=f_m^{(k)}(n)\alpha_1^n+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^n-\left(f_m^{(k)}(n-1)\alpha_1^{n-1}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_2^{n-1}\right)\left(f_m^{(k)}(n+1)\alpha_1^{n+1}+\sum_{i=2}^{k-m+1}\alpha_i^{n+1}\right)$

For Example：取 $\alpha_1=1,\alpha_2=-1,\alpha_3=-2,m=2$，得 $a_n^{(4)}=-a_{n-1}^{(4)}+3a_{n-2}^{(4)}+a_{n-3}^{(4)}-2a_{n-4}^{(4)}$

當 $n=3$ 時，$\ell=-151$ 滿足 $\left(a_3^{(4)}\right)^2-\ell=a_2^{(4)}\times a_4^{(4)}\Leftrightarrow(-5)^2-(-151)=8\times 22$

4. 探討k階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$

盧卡斯數列

$\left(a_n^{(2)}\right)^2-\ell=a_{n-t}^{(2)}\times a_{n+t}^{(2)} \xrightarrow{t=1} \left(b_n^{(2)}\right)^2-\ell=b_{n-1}^{(2)}\times b_{n+1}^{(2)}$，改為行列式形式：

【性質 4】費氏數列$\left\{b_n^{(2)}\right\}$中的二階Cassini恆等式

$$\ell=\begin{vmatrix} b_n^{(2)} & b_{n+1}^{(2)} \\ b_{n-1}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{vmatrix}=(-1)^{n-1}$$

【定理 12 】(費氏數列滿足(4)式的解)

(i)若$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為費氏數列中的偶數項之數列，則 $\ell=-1$。(ii)若$\left\{b_n^{(2)}\right\}$為費氏數列中的奇數項之數列，則 $\ell=1$。

費氏數列$\left\{b_n^{(2)}\right\}$中的二階Cassini恆等式 $\xrightarrow{\text{推廣}}$ **【性質 5-7】(k階Cassini恆等式)**

$$\ell=\begin{vmatrix} b_{n-k+2}^{(k)} & b_{n-k+3}^{(k)} & \cdots & b_n^{(k)} & b_{n+1}^{(k)} \\ b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} & \cdots & b_{n-1}^{(k)} & b_n^{(k)} \\ b_{n-k}^{(k)} & b_{n-k+1}^{(k)} & \ddots & b_{n-2}^{(k)} & b_{n-1}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-2k+3}^{(k)} & b_{n-2k+4}^{(k)} & \cdots & b_{n-k+1}^{(k)} & b_{n-k+2}^{(k)} \end{vmatrix}=\begin{cases}(c_k)^{n-k+1}, \text{其中}k\text{為奇數} \\ (-c_k)^{n-k+1}, \text{其中}k\text{為偶數}\end{cases}$$

由迭代過程可得

$$\ell=\begin{vmatrix} b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} & b_{n+1}^{(3)} \\ b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \end{vmatrix}=c_3\begin{vmatrix} b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} & b_n^{(3)} \\ b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \\ b_{n-4}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^2\begin{vmatrix} b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} & b_{n-1}^{(3)} \\ b_{n-4}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} & b_{n-2}^{(3)} \\ b_{n-5}^{(3)} & b_{n-4}^{(3)} & b_{n-3}^{(3)} \end{vmatrix}=\cdots=c_3^{n-2}\begin{vmatrix} b_1^{(3)} & b_2^{(3)} & b_3^{(3)} \\ b_0^{(3)} & b_1^{(3)} & b_2^{(3)} \\ b_{-1}^{(3)} & b_0^{(3)} & b_1^{(3)} \end{vmatrix}=c_3^{n-2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=c_3^{n-2}$$

【定理 13-15 】(k 階線性遞迴數列滿足(4)式的解) $\ell=(-1)^{k+1}c_k^{n-k+1}$

(i)當 k 為奇數且 $c_k=1$時，$\ell=1$。(ii)當 k 為偶數且 $c_k=1$時，$\ell=-1$。(iii)當 $c_k=-1$時，$\ell=(-1)^{n+2}$ 。

5. 探討k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$與$\left\{b_n^{(k)}\right\}$間性質

特徵方程式之兩相異實根或共軛虛根

【性質 8-9】(2.3階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(2)}\right\}$的一般式性質)

$k=2$: $b_n^{(2)}=\dfrac{1}{\sqrt{c_1^2+4c_2}}\left(\alpha_1^n-\alpha_2^n\right)$ $\quad k=3$: $b_n^{(3)}=\dfrac{c_1-\alpha_3-\alpha_2}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_1)}\alpha_1^n-\dfrac{c_1-\alpha_3-\alpha_1}{(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_3-\alpha_2)}\alpha_2^n+\dfrac{c_1-\alpha_2-\alpha_1}{(\alpha_3-\alpha_2)(\alpha_3-\alpha_1)}\alpha_3^n$

【定理 16 】(2 階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(2)}\right\}$與$\left\{b_n^{(2)}\right\}$間的恆等式)

(i)當 $c_2=1$ 時，$a_{n-1}^{(2)}+a_{n+1}^{(2)}=(c_1^2+4c_2)b_n^{(2)}$ 。(ii)當 $c_2=\pm1$時，$\left(a_{n+1}^{(2)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(2)}\right)^2=c_1(c_1^2+4c_2)b_{2n}^{(2)}$ 。

【定理 17-18 】(k 階線性遞迴數列數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$與$\left\{b_n^{(k)}\right\}$間的不等式)

(i) $a_{n-1}^{(k)}+a_{n+1}^{(k)}\neq\lambda_1 b_n^{(k)}$ $\quad$ (ii) $\left(a_{n+1}^{(k)}\right)^2-\left(a_{n-1}^{(k)}\right)^2\neq\lambda_2 b_{2n}^{(k)}$

三、研究結果

數論問題 「你可以找到多少組正整數對(a,b)，讓a^2-5是b的倍數，b^2-5是a的倍數？」

高階線性遞迴數列求解

k階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$ → **盧卡斯數列延伸**: $\left(a_n^{(k)}\right)^2-\ell=a_{n-t}^{(k)}\times a_{n+t}^{(k)}$

k階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$ → **費氏數列延伸**: k 階Cassini恆等式

改成行列式型式

求 ℓ 值

利用特徵複數根表示數列一般式

利用行列式性質

數列間恆等式

數論方式求解

可延伸為對於任意正整數ℓ，滿足 $b|(a^2-\ell), a|(b^2-\ell)$

→ 可存在$\ell|a$, $\ell|b$ 的 (a,b) 的解

$\ell=3$

$(a,b)=(3,3),(3,6),(6,33)$

四、結論與未來展望

1.結論

(i)由盧卡斯數列而類推至 k 階線性遞迴數列$\left\{a_n^{(k)}\right\}$，透過特徵複數根性質求(3)式之解，過程中部分性質是用行列式來論證，得到 ℓ值較為漂亮。但推廣至 k階滿足(3)式之解，其中 ℓ值在計算上是複雜的。

(ii)由費氏數列而類推至 k階線性遞迴數列$\left\{b_n^{(k)}\right\}$，利用行列式性質求(4)式之解使得 ℓ值在計算上是清晰可見的。美妙地(4)式是 k階行列式形式，即 k**階Cassini恆等式**。

(iii)上述兩種 k階線性遞迴數列探討兩者間的兩個恆等式或不等式，利用數列的一般式而論證，也用到Vandermonde行列式協助來論證。

2.未來展望

(i)原數學問題之解為非數列的解，其解是否有規律呢？原數學問題之延伸問題還有哪些呢？

(ii)推廣至 k階滿足(3)式之解，其中 ℓ 值在計算上是複雜的，是否能精簡呢？

(iii)上述兩種 k階線性遞迴數列探討兩者間的恆等式還有哪些呢？

五、參考文獻資料

[1] 林鳳美 (2019)。高階線性遞迴數列的一般化費氏螺線。**數學傳播**，**43**(4)，99-109。

[2] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)。**數學傳播**，**33**(4)，47-62。

[3] 張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(下)。**數學傳播**，**34**(1)，35-57。

[4] 游森棚 (2014)。互相牽制。**科學研習月刊-森棚教官的數學題**。**56** (12)，54。

[5] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (2007). ***The fabulous Fibonacci numbers***. Amherst, N.Y. : Prometheus Books.

[6] Rogers, N., Campbell, C.W., The Period of the Fibonacci Sequence Modulo j, Phd, The University of Arizona, Tucson, USA, 2007.