# $p$進位與 $p$ 的冪次方進位法間轉換及改變河內塔問題的移動原則之探討

10134 蔡靖瑜、10135 駱凱斌、 10627 郭力綸

## 一、前言

### 1.研究動機

上多元選修課程時，課堂上老師介紹著名的河內塔問題，河內塔問題的研究已經長達一百年的歷史，於是我們想挑戰在基本河內塔模型下，會有多少種的河內塔問題的研究方法，但我們鎖定必須有規律的遊戲規則，進一步利用程式語言來表示各種研究方法中移動步數。同時原河內塔問題可利用二進位來表示移動位置，所以也探討 $p$ 進位轉換 $p^m$進位的理論性質。

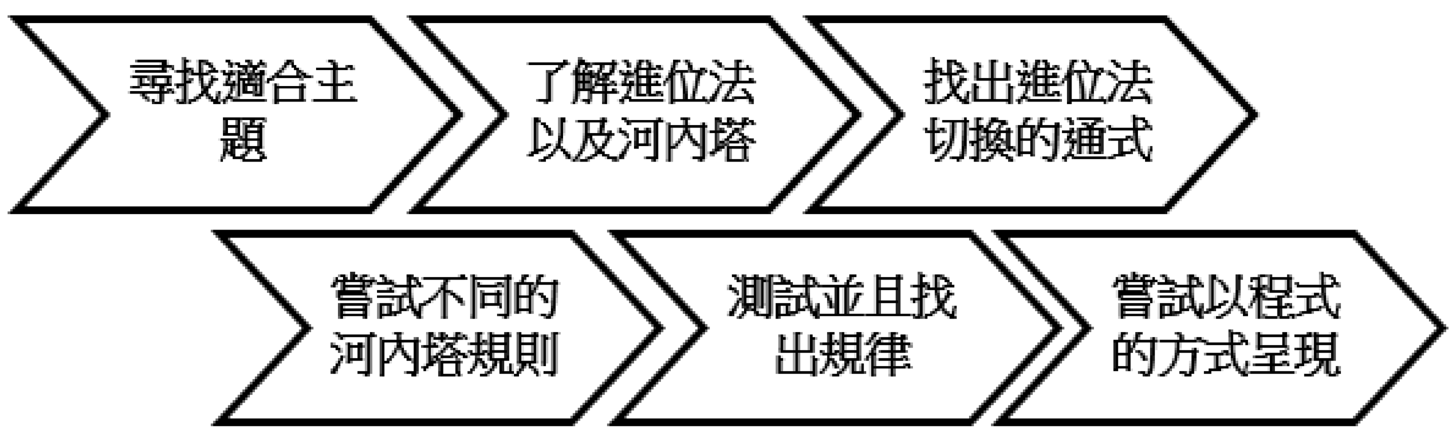
### 2.預備知識

- Sigma表示法
- 程式設計
- 進位法
- 基礎數學運算能力

### 3.研究目的

- 探討 $p$ 進位轉換$p^m$進位的理論性質
- 探討四種河內塔問題的移動規則
- 探討四種河內塔問題的程式
- 分析四種河內塔問題的最少移動步數

### 4.研究架構




## 二、研究過程與方法

### 1. $p$ 進位與 $p$ 的冪次方進位法間轉換

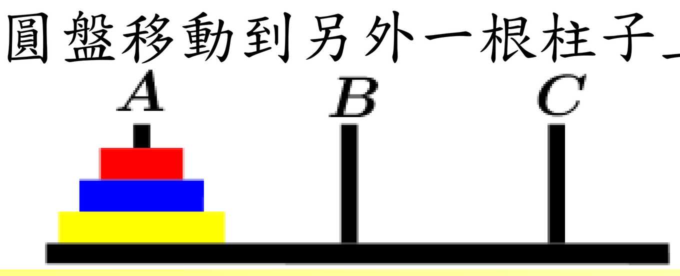
一開始先探討 $p$ 進位轉換 $p^2$，再類推至 $p$ 進為轉換$p^m$進位，因此，對於任意正整數 $m$，當 $n \equiv r \pmod m$ 時，

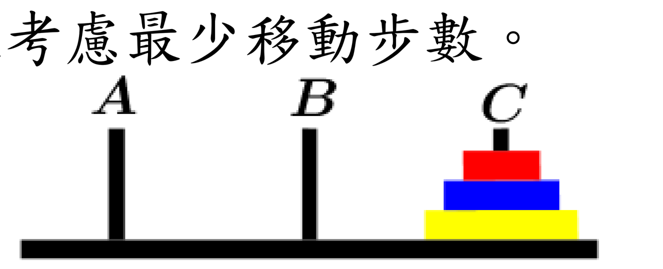
$$\left(\sum_{i=0}^{r} a_{n-i}p^{r-i},\sum_{i=0}^{m-1} a_{n-i-(r+1)}p^{m-1-i},\sum_{i=0}^{m-1} a_{n-i-m-(r+1)}p^{m-1-i},\cdots,\sum_{i=0}^{m-1} a_{m-1-i}p^{m-1-i}\right)_{p^m}$$

為 $s$ 的$p^m$進位表示法，其中 $r=0,1,2,\cdots,p-1$。

### 2.河內塔文獻探討

河內塔問題是盧卡斯（Édouard Lucas） 在 1883 年提出的數學遊戲 （游森棚，2017），就是在三根柱子上可以套多個圓盤，其中圓盤大小都不同，但是每次移動一個圓盤時，不能有較大的圓盤在較小的圓盤上。一般來說，遊戲開始是所有圓盤都在同一根柱子上，目標是在不違背遊戲規則的條件下，所有圓盤移動到另外一根柱子上考慮最少移動步數。



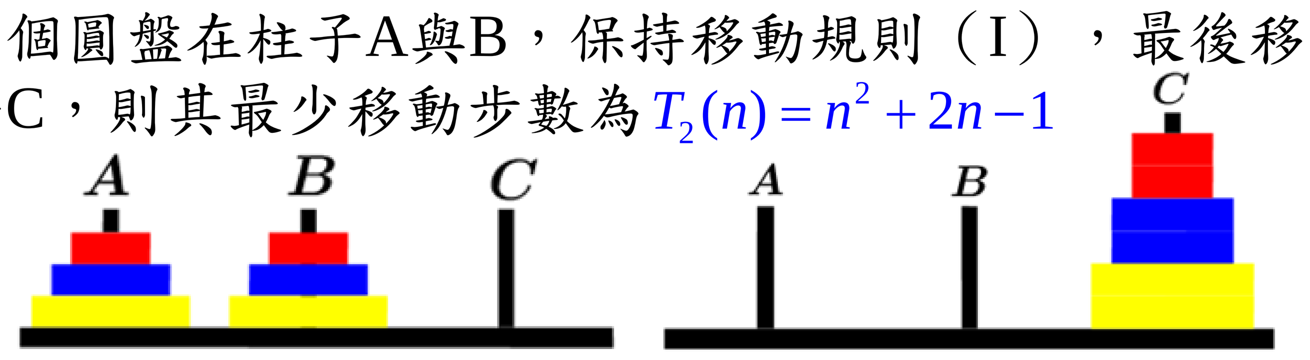

### 3.河內塔遊戲規則

- **移動規則（I）**

  就是以最最原本的規則，則其最少移動步數為$T_1(n)=2^n-1$。

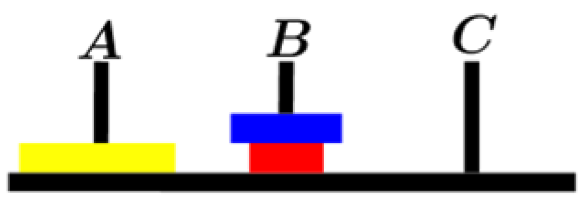
- **移動規則（II）**

  將兩組 $n$ 個圓盤在柱子A與B，保持移動規則（I），最後移動至柱子C，則其最少移動步數為 $T_2(n)=n^2+2n-1$



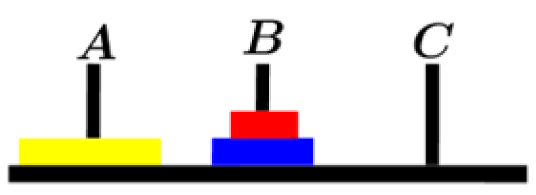

- **移動規則（III）**

  保持原河內塔問題的移動目標，但在移動的過程中，不需要管圓盤之間的大小，但最後大圓盤一定要在小圓盤的下方。設三根柱子A,B,C且 $n$ 個圓盤的河內塔，則其最少移動步數為 $T_3(n)=2n-1$。

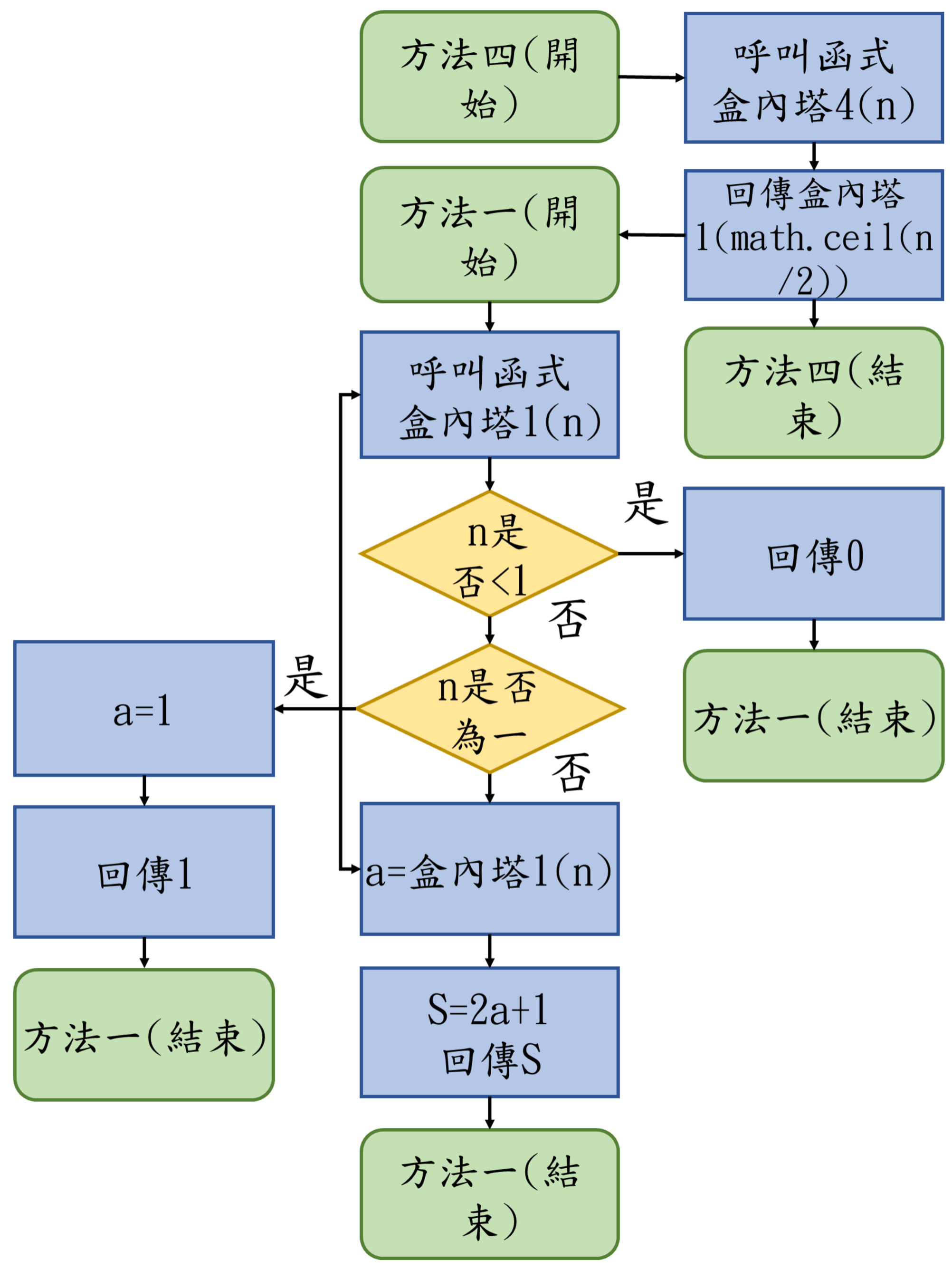



- **移動規則（IV）**

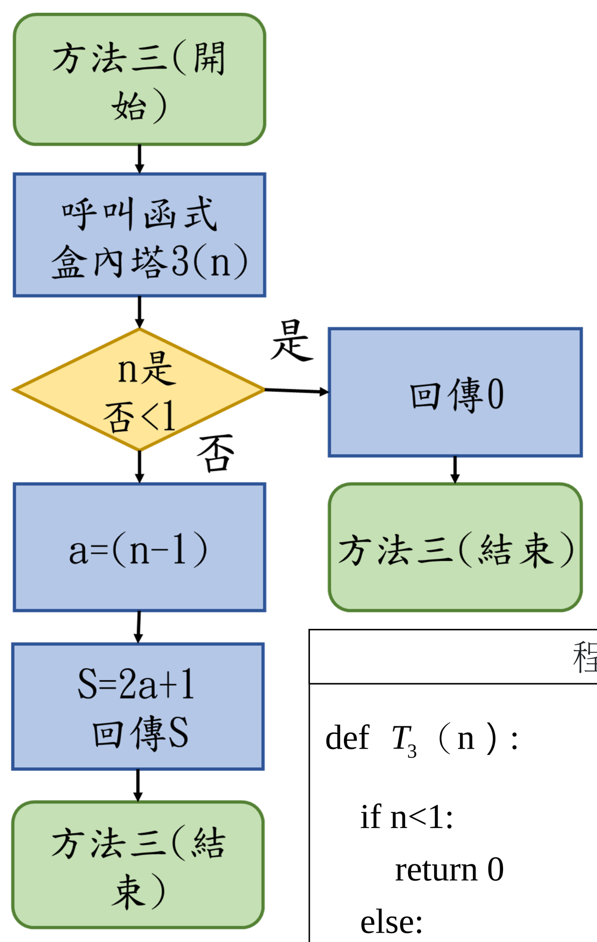
  保持原河內塔問題的移動目標，但在搬動的過程中，一次可以搬動兩個圓盤。設三根柱子A,B,C且 $n$ 個圓盤的河內塔，則其最少移動步數為 $T_4(n)=2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}-1$，其中⌈ ⌉為上高斯符號。




### 9.四種河內塔問題的流程圖與程式




| 程式（I） | |
|---|---|
| def $T_1$（n）:<br>if n<1:<br>return 0<br>elif n==1:<br>return 1<br>else:<br>a=$T_1$（n-1）<br>s=a+1+a<br>return s | for i in range（1,11）:<br>print（$T_1$（i））<br>for c in range（1,11）:<br>e=bin（$T_1$<br>（c）).replace( "b","" )<br>print（int（e）） |
| 定義此移動規則的程式 | 印出此移動規則的前十項最少移動步數解 |
| **程式結果** | |
| >>>1<br>3<br>7<br>15<br>31<br>63<br>127<br>255<br>511<br>1023 | 1<br>11<br>111<br>1111<br>11111<br>111111<br>1111111<br>11111111<br>111111111<br>1111111111 |
| result（十進制） | result（二進制） |




| 程式（IV） | | 程式結果 | |
|---|---|---|---|
| import math<br>def $T_1$（n）:<br>if n<1:<br>return 0<br>elif n==1:<br>return 1<br>else:<br>a=$T_1$（n-1）<br>s=2 * a + 1<br>return s<br>def $T_4$（n）:<br>return $T_1$<br>1（math.ceil（n/2）） | for i in range（1,11）:<br>print（$T_4$（i））<br>print（"--------------"）<br>for c in range（1,11）:<br>e=bin（$T_4$<br>（c）).replace( "b","" )<br>print（int（e）） | >>>1<br>1<br>3<br>3<br>7<br>7<br>15<br>15<br>31<br>31 | 1<br>1<br>11<br>11<br>111<br>111<br>1111<br>1111<br>11111<br>11111 |
| 定義此移動規則的程式 | 印出此移動規則的前十項最少移動步數解 | result（十進制） | result（二進制） |

| 程式（III） | | 程式結果 | |
|---|---|---|---|
| def $T_3$（n）:<br>if n<1:<br>return 0<br>else:<br>a=（n-1）<br>s=2 * a + 1<br>return s | for i in range（1,11）:<br>print（$T_3$（i））<br>for c in range（1,11）:<br>e=bin（$T_3$<br>（c）).replace( "b","" )<br>print（int（e）） | >>>1<br>3<br>5<br>7<br>9<br>11<br>13<br>15<br>17<br>19 | 1<br>11<br>101<br>111<br>1001<br>1011<br>1101<br>1111<br>10001<br>10011 |
| 定義此移動規則的程式 | 印出此移動規則的前十項最少移動步數解 | result（十進制） | result（二進制） |

## 三、研究結果

| 移動規則 | 移動最少步數差異 |
|---|---|
| 移動規則（I）與移動規則（IV） | 移動規則（I）中移動最少步數$T_1(n)=2^n-1$，而移動規則（IV） 中移動最少步數$T_3(n)=2^{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil}-1$，似乎差異影響在次方，原因是移動規則（IV）是兩兩移動的，所以次方會除以 2，但因為有可能面臨只剩一個圓盤的狀況，所以需要加上上高斯符號。 |
| 移動規則（I）與移動規則（II） | 移動規則（II）是用兩組河內塔，理論上應該是移動規則（I）中移動最少步數的兩倍，但是要移動最下面那一層的時候需要先將它們疊起來，因此會再多出至少一步。 |
| 移動規則（I）與移動規則（III） | 移動規則（III）是不用管圓盤大小移動，顯然移動最少步數是比移動規則（I）中移動最少步數還要少，所以可以減少多次移動同一圓盤的步數。美妙地，移動最少步數皆是奇數個。 |

## 四、參考文獻

許介彥 (2001)。遞迴函數的求解技巧，**科學教育月刊**，238(4) 。
許介彥 (2001)。遞迴演算法簡介。**科學教育月刊**，245(12)。
許介彥 (2005)。**數學悠哉遊**。三民出版社。
游森棚 (2017)。河內塔，從三棍到四棍。**科學月刊**，568，260-261。