探討正整數2與3冪次方倍數判斷法及任意質數倍數判斷法

作者

林晉宇 黃煒甯 吳承恩

指導老師

林鳳美

前言（Introduction）

研究動機（Research Motivation）

探討任意質數倍數判斷法

- 由特殊數字（例如：2、3、4、5、8、9 和 11）之倍數判斷法推廣出任一質數
- 探討倍數判斷法的一個規則性性質

研究目的（Research Purpose）

- 推導 2^m 、3^m、7^m、11^m 、13^m、17^m 的倍數理論判斷法
- 上述質數 p 的倍數證明方法的差異

前言（Introduction）

研究架構（Research Architecture ）

◆利用同餘性質求出充要條件

◆透過Σ運算簡化過程

◆藉由歐拉-費馬定理找出規律性

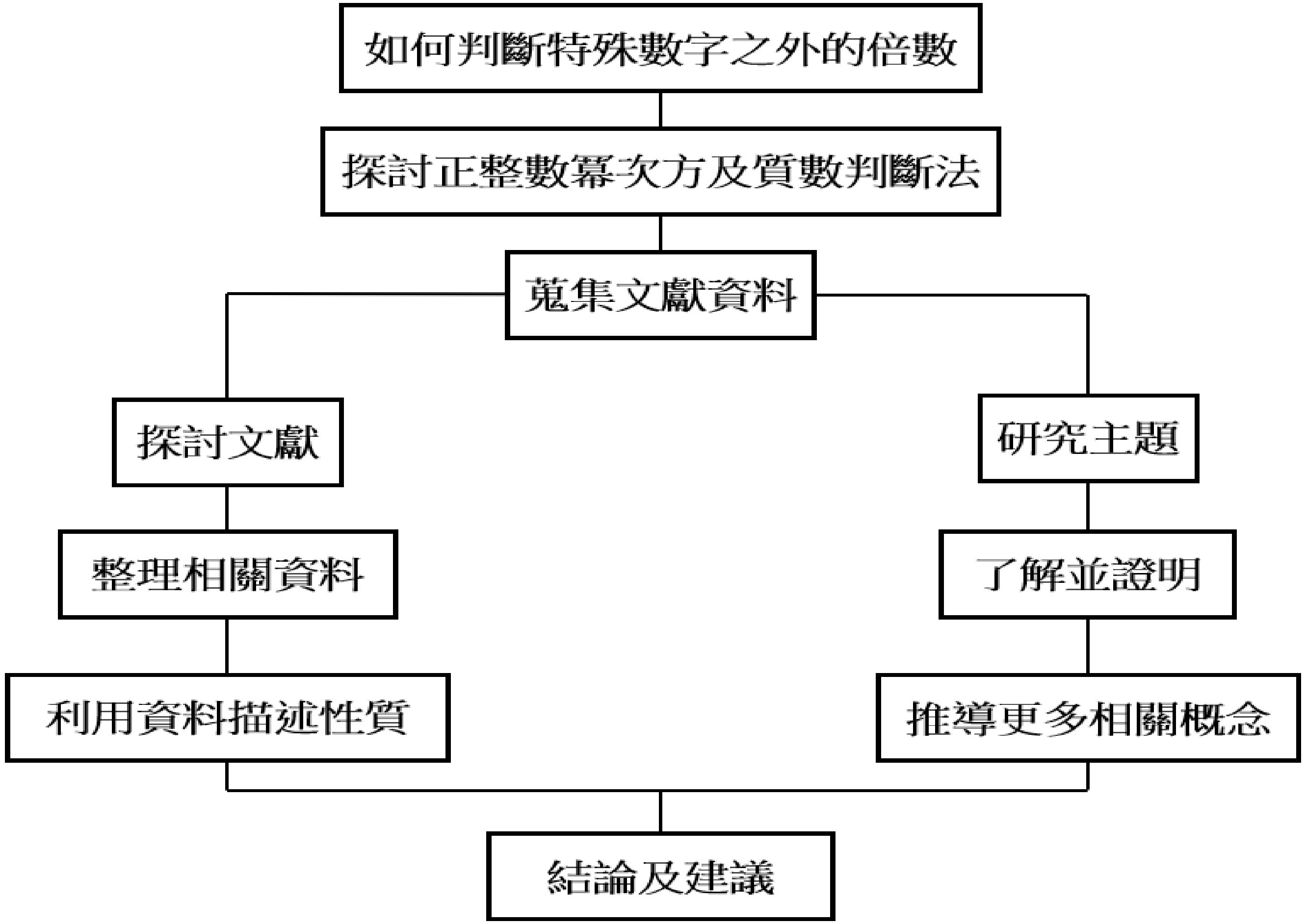
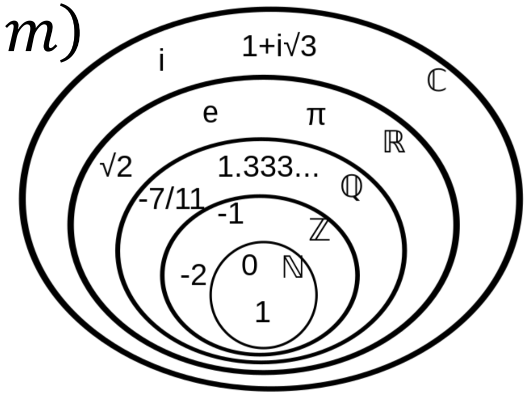


圖 1：研究架構

名詞定義（Noun and Definition）

定義1　同餘性質（Congruence Modulo）

則對於任意整數c皆有$a+c \equiv b+c(mod\ m)$且$ac \equiv bc(mod\ m)$



定義2　歐拉-費馬定理（Euler Theorem）

設a為一個正整數，p是一個質數，且a, p互質，則$a^{(p-1)} \equiv 1$ (mod p)。

例如：a=6，p=7，其中7為質數，且gcd(6,7)=1

可以得出$6^{(7-1)} \equiv 1$ (mod 7)，46656≡1 (mod 7)

註：歐拉-費馬定理是由費馬小定理的推廣。費馬小定理是數論中的一個定理

探討 2^m 及 3^m 的倍數判斷法

2的倍數判斷法

設 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為正整數，其中 x_n 為正整數且 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$ 為 0 到 9 的非負整數，則

$x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為 2 的倍數的充要條件是 $2 \mid x_1$

2^m 的倍數判斷法

$$\boxed{x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1 \text{ 為 } 2^m \text{ 的倍數的充要條件是 } 2^m \Big| \sum_{i=1}^{m} 10^i x_i}$$

3的倍數判斷法

設 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為正整數，其中 x_n 為正整數且 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$ 為 0 到 9 的非負整數

$x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為 3 的倍數的充要條件是 $\sum_{i=1}^{n} x_i$ 為 3 的倍數

3^m的倍數判斷法

$$\boxed{x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1 \text{ 為 } 9 \text{ 的倍數的充要條件是 } 9 \Big| \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

對於任意正整數 ，各奇數節與偶數節的數值相減差是3的倍數時，此數為3的倍數

探討7^m的倍數判斷法

7的倍數判斷法

7^m的倍數判斷法

設 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為正整數，其中 x_n, n 為正整數且 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$ 為0到9的非負整數，若 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為 7 的倍數

$$7 \left| \begin{bmatrix} 1\times\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+1} + 3\times\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+2} + 2\times\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+3} + 6\times\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+4} \\ +4\times\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+5} + 5\times\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+6} \end{bmatrix} \right.$$

位數	判別
一位數	$x_1 = x_1 \times 10^0 = 1 \times x_1$ 且 $1 \equiv 1 \pmod 7$
二位數	$x_2 x_1 = 10^1 \times x_2 + 1 \times x_1$ 且 $10 \equiv 3 \pmod 7$
三位數	$x_3 x_2 x_1 = 10^2 \times x_3 + 10^1 \times x_2 + 1 \times x_1$ 且 $10^2 \equiv 2 \pmod 7$
四位數	$x_4 x_3 x_2 x_1 = 10^3 \times x_4 + 10^2 \times x_3 + 10^1 \times x_2 + 1 \times x_1$ 且 $10^3 \equiv 6 \pmod 7$
五位數	$x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 = 10^4 \times x_5 + 10^3 \times x_4 + 10^2 \times x_3 + 10^1 \times x_2 + 1 \times x_1$ 且 $10^4 \equiv 4 \pmod 7$
六位數	$x_6 x_5 x_4 x_3 x_2 x_1 \equiv 5 \times x_6 + 4 \times x_5 + 6 \times x_4 + 2 \times x_3 + 3 \times x_2 + 1 \times x_1 \pmod 7$
七位數	根據以上判斷規則會有6位數一循環的規律出現

探討11^m及13^m的倍數判斷法

11的倍數判斷法

設 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為正整數，其中 x_n 為正整數且 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$ 為 0 到 9 的非負整數，若 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為 11 的倍數

11^m的倍數判斷法

$$x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1 \equiv \sum_{i=1}^{n} (-1)^i x_i \pmod{11}$$

13的倍數判斷法

設 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為正整數，其中 x_n 為正整數且 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$ 為 0 到 9 的非負整數，若 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$ 為 13 的倍數

13^m的倍數判斷法

$$13 \left| \left[1\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+1} + 10\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+2} + 9\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+3} + 12\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+4} + 3\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+5} + 4\sum_{k=1}^{n/6} a_{6(k-1)+6} \right] \right.$$

探討17^m的倍數判斷法

17的倍數判斷法

設$x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$為正整數，其中$x_n$為正整數且$x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$為0到9的非負整數

17^m的倍數判斷法

$$17 \,\Bigg\|\, \Bigg[1\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+1} + 10\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+2} + 15\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+3} + 14\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+4} + 4\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+5} + 6\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+6} + 9\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+7} + 5\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+8} + 16\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+9} + 7\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+10} + 2\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+11} + 3\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+12} + 13\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+13} + 11\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+14} + 8\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+15} + 12\sum_{k=1}^{n/16} x_{16(k-1)+16} \Bigg]$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
r_n	1	10	15	14	4	6	9	5	16	7	2	3	13	11	8	12	1	10	15

探討質數 p 的倍數判斷法

設 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為正整數，其中 x_n 為正整數且 $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \cdots, x_1$ 為0到9的非負整數，若 $x_n x_{n-1} x_{n-2} \cdots x_1$ 為 p 的倍數且 a_i 為從個位數開始的循環的規律數字，其中當 $i = m$ 時為最小循環數

$$p \,\middle|\, \left[a_1 \sum_{k=1}^{n/m} x_{m(k-1)+1} + a_2 \sum_{k=1}^{n/m} x_{m(k-1)+2} + a_3 \sum_{k=1}^{n/m} x_{m(k-1)+3} + a_4 \sum_{k=1}^{n/m} x_{m(k-1)+4} + \cdots + a_m \sum_{k=1}^{n/m} x_{m(k-1)+m} \right]$$

質數	最小循環數	從個位數開始的循環的規律數字
2	**1**	1
3	**1**	1
5	**1**	1
7	**6**	1,3,2,6,4,5
11	**2**	1,10,1
13	**6**	1,10,9,12,3,4,1
17	**16**	1,10,15,14,4,6,9,5,16,7,2,3,13,11,8,12
19	**18**	1,10,5,12,6,3,11,15,17,18,9,14,7,13,16,8,4,2
23	**22**	1,10,8,11,18,19,6,14,2,20,16,22,13,15,12,5,4,17,9,21,3
29	**28**	1,10,13,14,24,8,22,17,25,18,6,2,20,26,28,19,16,15,5,21,7,12,4,11,23,27,9,3
31	**15**	1,10,7,8,18,25,2,20,14,16,5,19,4,9,28
37	**3**	1,10,26
41	**5**	1,10,18,16,37
43	**17**	1,10,14,17,41,23,15,21,38,36,16,31,9,4,40,13

結論（Conclusions）

- ●將特殊的數字之倍數判斷法延伸，得到任意質數的倍數判斷法
- ●找到任意質數的倍數判斷法
- ●從中找到質數p的規律性及倍數一般化的性質
- ●由同餘性質找到從個位數開始的循環的規律數字
- ●由歐拉-費馬定理得知最小循環數

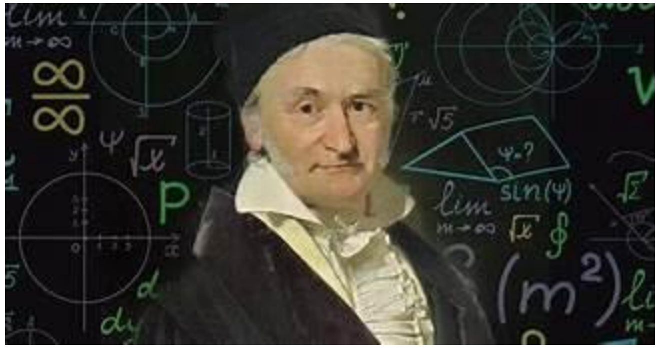
參考文獻（References）

許介彥（2005）。**數學悠哉遊**。三民出版社。

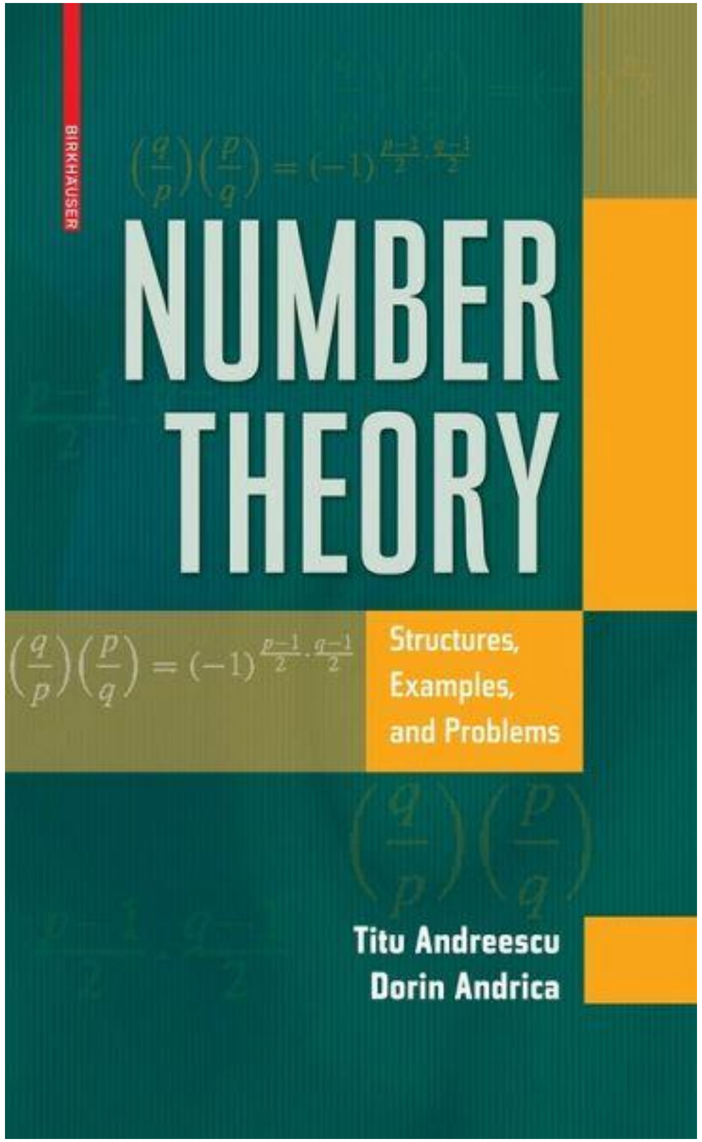
許介彥（2002）。神奇的數字9。**科學教育月刊，246**（1）。

許介彥（2002）。費馬小定理。**科學教育月刊，246**（1）。

閔嗣鶴 嚴士健（2020）。**初等數論**。高等教育出版社。



數學是科學的皇后，數論是數學的皇后。
——卡爾·弗里德里希·高斯



成長與收穫

20722 林晉宇

這篇小論文主要在探討m的n次方倍數關係，利用sigma簡化證明過程，並嘗試推導出倍數關係通式。透過文獻參考和特殊數字的倍數證明，了解許多性質，並將其延伸為m的n次方。

過程中遇到許多問題，例如：有許多性質和數學符號看不懂，透過請教老師漸漸了解其中的原理和利用方法。或是，當我們很開心地以為我們找出3^n的倍數證明通式時，帶入27時發現條件不只是這些，花費許多時間才解決。遇到問題就是去解決，過程中一定有很多問題，重要的是我們如何面對，抱持著什麼態度看待。

在這次小論文研究後，除了更了解倍數性質推導，也透過文獻學習到許多性質，並跳脫原有的框架，用最數理的方式，證明我們從小到大熟知的定理。當我們最一開始接觸到倍數時，都沒有人告訴我們為什麼，只是利用列舉法證明，但經過這次的研究，深入了解其原因，並利用已知過程，延伸出我們未知的領域。

成長與收穫

21014 黃煒甯

每提到倍數時，課本或是講義就會提供一個方法去判斷某數的倍數，而這些方法，我們只知道結果如此，但卻不知道為何，透過這次對於倍數的深入探討，證明那些我們所熟知的定理，過程中也激盪出許多新知。

討論過程中，我們經歷了一些瓶頸，我們發現有些方法可能無法完全套入某數的n次方證明，例如：3的2次方的倍數即為每位數字相加為9的倍數，3的3次方的倍數即為每位數字加為27的倍數，但是這種方法只適用於999以上的數字，所以無法完全套用在3的n次方倍數公式，但我們也從中發現其規律，也利用此規律得出一個簡式來判別其倍數。

在老師的指導中下，學會怎麼將我們的證明利用sigma來解釋，如何運用同餘性質，以及運用歐拉-費馬定理得知最小循環數，從未知的領域延伸出許多發現，透過現有文獻中尋找出一些方法去驗證。

成長與收穫

20716 吳承恩

在之前的最後一次學習倍數判別法是在國中的時候，那時對於這方面的內容還了解甚少，所以在這次深入研究倍數判別法並做成小論文的過程中，我們動了好多腦，也學到了很多東西，但也遇到了很多困難，像是這篇小論文的數字都是用x假設，而且即使式子用了Σ簡化還是非常長，腦袋經常打結，式子也經常寫錯重改，所以我們花了一段時間才適應。

在一開始，原本我以為證明倍數判別法這種純數論的東西會很無聊，但後來發現其實還滿有趣的，每個數字可能都有更多的判別法可以找，而且在老師的教學及引導還有小組裡持續的討論下，慢慢地做出了一些我們的成果出來，有了成就感，也慢慢開始享受了這其中的過程，跟小組成員合作得非常愉快。