一、前言

1.研究動機

巴斯卡三角形中斜排可得的數列為**費氏數列**，同樣地我們可建構某算術三角形中斜排所得的數列為**高階正整係數齊次線性遞迴數列**，內文簡稱**高階線性遞迴數列**。

費氏數列中每一項除以某一正整數後所得的餘數數列具有許多有趣的性質，例如：**餘數數列必有週期性及餘數數列中出現0的個數與週期長度有關**，即在固定間隔某項後可被某一正整數整除。

本作品中我們嘗試將費氏數列中的餘數數列性質推廣到一般高階線性遞迴數列的情形，其**餘數數列必有週期性及餘數數列中出現數個0或數個正整數的個數與週期長度有關**，也得到其**因倍數性質**。

2.研究目的

一、利用k項式定理建構k**階算術三角形**，探討其性質。
二、探討k階算術三角形中的**斜排數列**，證明此數列為k**階線性遞迴數列**。
三、探討k階線性遞迴數列中每一項除以某正整數後所得的餘數數列之週期性，並論證之。
四、探討k階線性遞迴數列中**係數在何種條件下**，每個週期循環列中會由數個0或數個正整數均勻分割性質，及**餘數數列**在某項後均為常數，並論證之。
五、探討k階線性遞迴數列的**因倍數性質**，並論證之。

3.定義與預備定理

【**定義1**】給定一數列$\left\{a_n^k\right\}$，若存在$k\,(\geq 2)$個正整數$c_1,c_2,\cdots,c_k$，其中$c_k\neq 0$，滿足兩條件

(i) (**初始條件**) $a_1=1, a_i=0,$ 其中$-(k-2)\leq i\leq 0$。

(ii) (**遞迴關係**) $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+c_3a_{n-3}+\cdots+c_{k-1}a_{n-k+1}+c_ka_{n-k},\ n\geq 2$

則滿足(i)與(ii)式的數列$\left\{a_n^k\right\}$，稱為k **階正整係數齊次線性遞迴數列**，內文簡稱k **階線性遞迴數列**。其次，稱k階線性遞迴數列中每一項除以正整數m後所得的餘數數列為 k **階餘數數列**$\left\{r_n^k\right\}$。

【**預備定理 1~2**】(k **階Cassini恆等式**)

對於任意正整數n，
$$\begin{vmatrix} a_{n+1} & a_n & a_{n-1} & \cdots & a_{n-k+2} \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_{n-k+1} \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \ddots & a_{n-k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-k+2} & a_{n-k+1} & a_{n-k} & \cdots & a_{n-2k+3} \end{vmatrix} = \begin{cases} (-1)^{\left[\frac{k}{2}\right]}c_k^{n-k+1} & \text{,其中}k\text{為奇數} \\ (-1)^{n-\frac{k}{2}+1}c_k^{n-k+1} & \text{,其中}k\text{為偶數} \end{cases}$$

【**預備定理 3**】

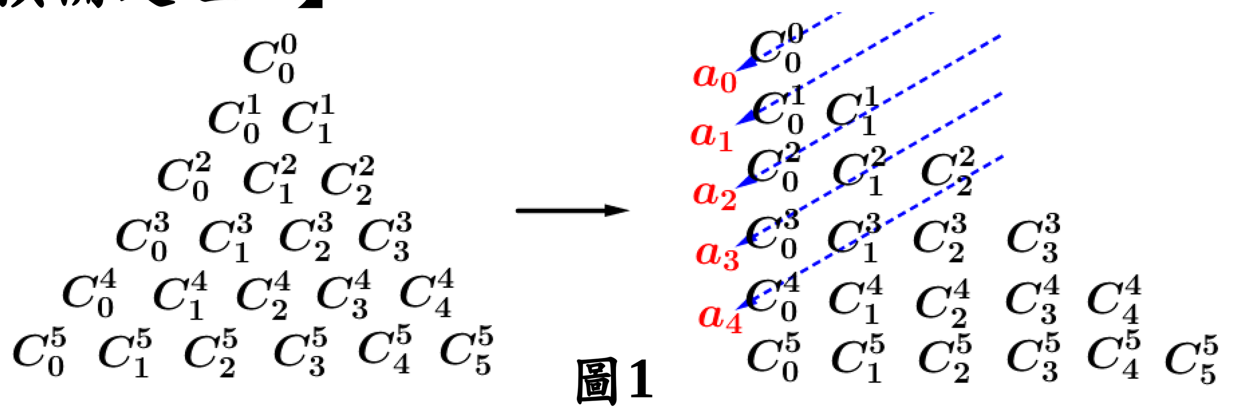


圖1

$a_n=\sum_{r=0}^{[n/2]}C_r^{n-r}$，**其中[ ]為高斯符號**。

【**定義2**】(k**項式推廣定理**)

設$n_1,n_2,\cdots,n_k,n$為非負整數，且$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_kx_k$為$k$項式，則
$$(\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_kx_k)^n=\sum_{n_1+n_2+\cdots+n_k=n} D_r^n\prod_{i=1}^{k}x_i^{n_i}$$
其中D_r^n為k項式推廣定理展開後的係數$(0\leq r\leq n)$，稱為k**項式推廣定理** (Multinomial theorem)。

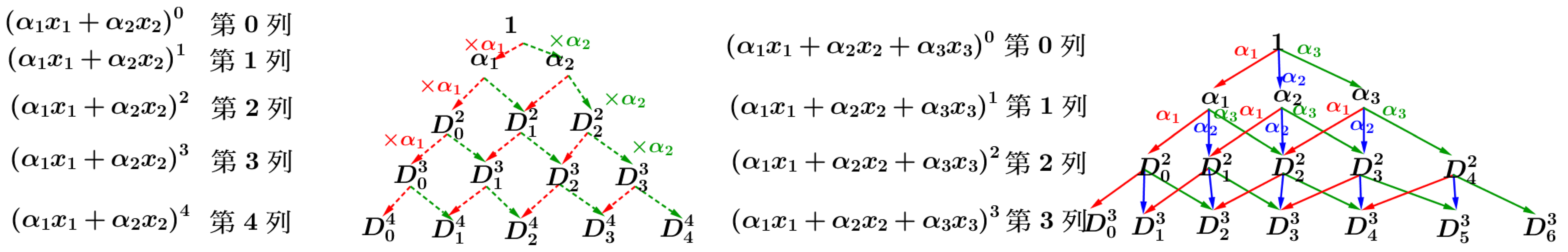


圖2：二項式定理及三項式定理中的算術三角形

二、研究方法或過程或結果

1.探討k階算術三角形

【**定理 1**】(k **項式定理中的算術三角形性質**)
$$\begin{cases} D_r^n=0, & \text{其中 } r<0 \text{ 或 } r>(k-1)n \\ D_r^n=\sum_{i=1}^{k}\alpha_iD_{r-i+1}^{n-1}, & \text{其中 } 0\leq r\leq (k-1)n \end{cases}$$

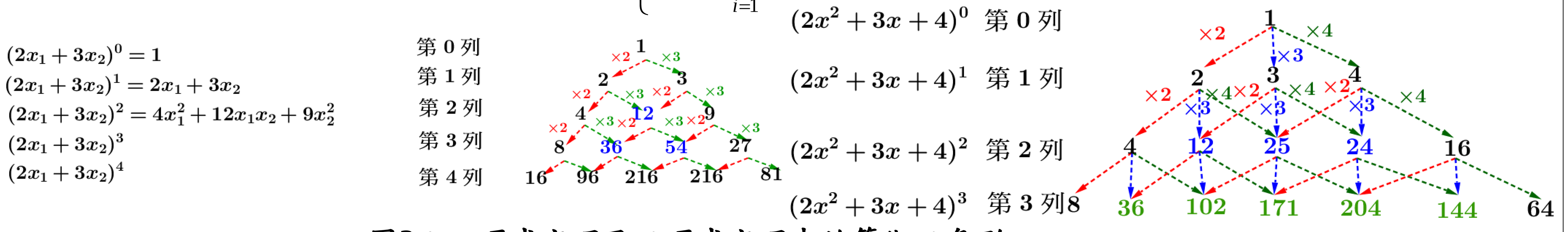
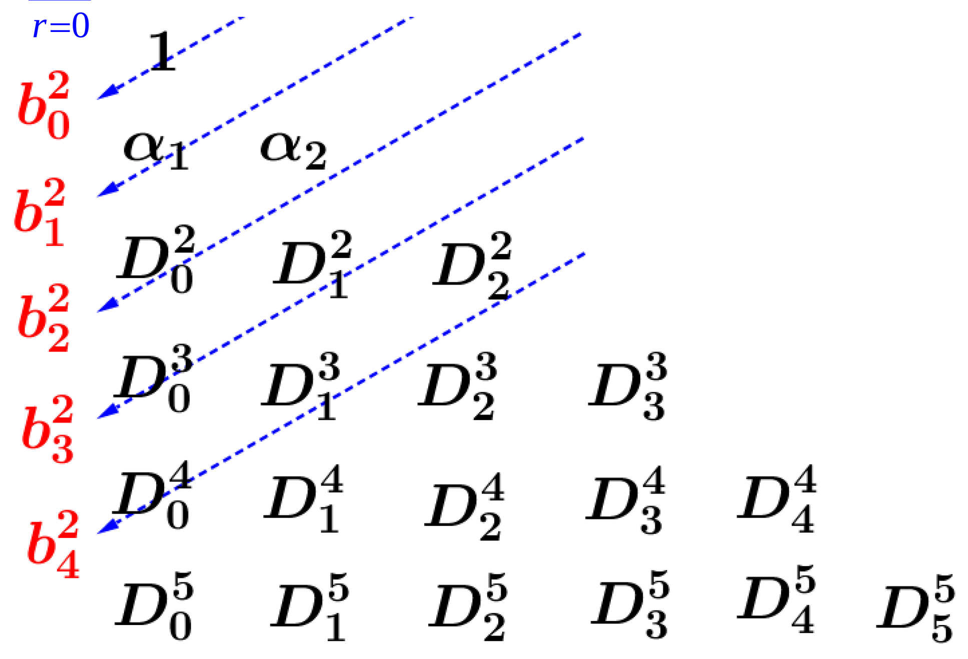


圖3：二項式定理及三項式定理中的算術三角形

【**性質 1及定理 2**】(k**階算術三角形中的斜排數列之一般式**)

$b_n^k=\sum_{r=0}^{n-\lceil n/k\rceil}D_r^{n-r}$，**其中⌈ ⌉為上高斯符號，且**$\begin{cases} b_0^k=1, b_1^k=\alpha_1, b_2^k=\alpha_2+D_0^k,\cdots,b_k^k=D_0^k+D_1^{k-1}+\cdots+D_{k-2}^2+\alpha_k \\ b_n^k=\alpha_1b_{n-1}^k+\alpha_2b_{n-2}^k+\cdots+\alpha_kb_{n-k}^k, n\geq k \end{cases}$。



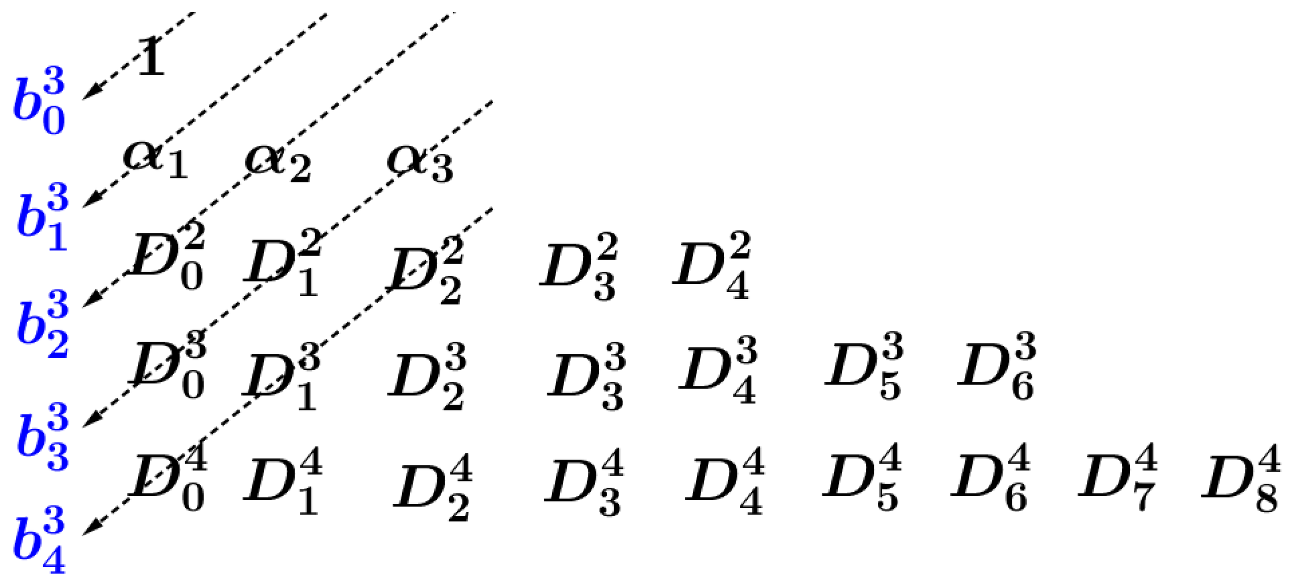


圖4：$b_n^2=\sum_{r=0}^{n-\lceil n/2\rceil}D_r^{n-r}$，**其中⌈ ⌉為上高斯符號**　**圖5**：$b_n^3=\sum_{r=0}^{n-\lceil n/3\rceil}D_r^{n-r}$，**其中⌈ ⌉為上高斯符號**

2.探討數列中k階餘數數列

週期性

【性質 2及定理 3】(k階餘數數列的性質)

設$\{a_n^k\}$為k階線性遞迴數列，若 r_n為a_n模m後的餘數($m\in N$)，則$(c_1r_{n-1}+c_2r_{n-2}+\cdots+c_kr_{n-k})\equiv r_n \pmod m$

【性質 2及定理 4】(k階餘數數列的週期性質)

設$\{a_n^k\}$為k階線性遞迴數列，若 r_n為a_n模m後的餘數($m\in N$)，則

(i)對於大於1的正整數n，存在$r_i,r_{i+1},\cdots,r_{i+k},r_j,r_{j+1},\cdots,r_{j+k}\in\{0,1,\cdots,m-1\}$且$1\le i<j\le n$ 使得

$$(r_i,r_{i+1})=(r_j,r_{j+1}),\cdots,(r_{i+k-1},r_{i+k})=(r_{j+k-1},r_{j+k})$$

(ii)數列$\{r_n^k\}$為週期數列。

計算週期長度

定義k**階餘數數列的週期長度**，記作 $L_k(m)$。

研究方法：每個週期循環列中會有$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1個}$**或正整數**$x_1,\cdots,x_{k-1}$**均勻分割情形，其均勻分割長度**記作為$\ell_k(m)$，

即存在正整數s使得 $L_k(m)=s\cdot\ell_k(m)$，其中 s 為$L_k(m)$中出現$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1個}$ 或 $x_1,\cdots,x_{k-1}$的個數。

另外，k階餘數數列在某項後均為常數，顯然週期長度等於1，即 $L_k(m)=1$。

For Example：

(1)每個週期循環列皆由$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1個}$ **均勻分割：** $\{a_n^3\}:a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3},m=7$

$1,1,2,4,0,6,3,2,4,2,1,0,3,4,0,0,\ \ 4,4,1,2,0,3,5,1,2,1,4,0,5,2,0,0,\ \ 2,2,4,1,0,5,6,4,1,4,2,0,6,1,0,0$ $\therefore s=3,\ell_3(7)=16\Rightarrow L_3(7)=3\cdot16=48$

(2)每個週期循環列皆由 $x_1,\cdots,x_{k-1}$**均勻分割：** $\{a_n^3\}:a_n=3a_{n-1}+5a_{n-2}+8a_{n-3},m=22$

$1,3,14,21,3,6,3,19,10,17,11,0,\ \ 15,1,12,7,1,2,1,21,18,13,11,0,$ $\therefore s=5,\ell_3(22)=12\Rightarrow L_3(22)=5\cdot12=60$

$5,15,4,17,15,8,15,7,6,19,11\ 0,\ \ 9,5,16,13,5,10,5,17,2,21,11,0,\ \ 3,9,20,19,9,18,9,13,8,7,11,0$

(3)k階餘數數列在某項後均為0，即 $L_k(m)=1$。

$\{a_n^3\}:a_n=2a_{n-1}+4a_{n-2}+2a_{n-3},m=8$ $1,2,0,2,0,0,4,0,0,\cdots,0,0$ $\therefore L_3(8)=1$

(4)k階餘數數列在某項後均為不為0的常數，即 $L_k(m)=1$。

$\{a_n^2\}:a_n=4a_{n-1}+6a_{n-2},m=18$ $1,4,4,\cdots,4,4$ $\therefore L_2(18)=1$

區分週期循環列的條件

$(1)\ c_k=1$: **每個週期循環列皆由** $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1個}$**均勻分割，參見性質3~5。**

【定理 5】(二階餘數數列的週期循環性質)

設$\{r_n^2\}$為二階線性遞迴數列 $\{a_n^2\}$中的餘數數列且$c_2=1$，若s為週期長度$L_2(m)$中**0**出現的個數，則

(i) $r_{i+j}\equiv\llbracket r_jr_{i-1}\rrbracket \pmod m$，其中$\llbracket r_jr_{i-1}\rrbracket$為模$m$後的餘數且$1\le i\le s-1, j\in N$。 (ii) $L_2(m)=s\cdot\ell_2(m)$**,其中**$s=1,2,4$ 。

$\{a_n^2\}:a_n=2a_{n-1}+a_{n-2},m=13$為例:

第1段	r_j	$r_1=1$	$r_2=2$	$r_3=5$	$r_4=12$	$r_5=3$	$r_6=5$	$r_7=0$
		↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
第2段	r_jr_6	5	10	25	60	15	25	0
	$\llbracket r_jr_6\rrbracket_{\bmod 13}$	5	10	12	8	2	12	0
第3段	$r_jr_6^2$	25	50	60	40	10	60	0
	$\llbracket r_jr_6^2\rrbracket_{\bmod 13}$	12	11	8	1	10	8	0

由【預備定理 1】知 $\llbracket r_\alpha^t\rrbracket^2-0^2\equiv(-1)^{t-2}\pmod m\Rightarrow\llbracket r_\alpha^{2t}\rrbracket\equiv(-1)^{t-2}\pmod m$

(a)當$r_\alpha=mq+1$ 或$r_\alpha=mq-(m-1)$時，$r_\alpha\equiv1\pmod m$，所以 $s=1$。

(b)當$r_\alpha=mq-1$ 時，$\llbracket r_\alpha^2\rrbracket\equiv(-1)^2\pmod m$ 所以 $s=2$ 。

(c)當 $r_\alpha=mq-v,v=1,0,\cdots,m-1,m|v^2+1$ 時，$\llbracket r_\alpha^4\rrbracket\equiv1\pmod m$ 所以$s=4$。

(d)其餘情形不滿足$\llbracket r_\alpha^s\rrbracket=1$ 。

【定理 6】(三階餘數數列的週期循環性質)

設$\{r_n^3\}$為三階線性遞迴數列 $\{a_n^3\}$中的餘數數列且 $c_3=1$，若s為週期長度$L_3(m)$中**0,0**出現的個數，則

(i) $r_{i+j+1}\equiv\llbracket r_jr_{i-1}\rrbracket\pmod m$ ，其中$\llbracket r_jr_{i-1}\rrbracket$ 為模m後的餘數且 $1\le i\le s-1, j\in N$。 (ii) $L_3(m)=s\cdot\ell_3(m)$**,其中**$s=1,3$。

$\{a_n^3\}:a_n=2a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3},m=7$為例:

第1段	r_j	1	2	5	6	5	0	4	6	2	0	1	4	2	2	3	3	4	0	0
	r_jr_{17}	4	8	20	24	20	0	16	24	8	0	4	16	8	8	12	12	16	0	0
第2段	$\llbracket r_jr_{17}\rrbracket_{\bmod 7}$	4	1	6	3	6	0	2	3	1	0	4	2	1	1	5	5	2	0	0

由【預備定理 2】知 $\llbracket r_\alpha^{3t}\rrbracket\equiv1\pmod m$

(a)當$r_\alpha=mq+1$時，$r_\alpha\equiv1\pmod m$，所以$s=1$。

(b)當$r_\alpha=mq+v,v\in\{v\,|\,(m-v)^3\equiv-1\pmod m\}$時，

$\llbracket r_\alpha^3\rrbracket\equiv1\pmod m\Rightarrow s=3$

【定理 7】(k階餘數數列的週期循環性質)

設$\{r_n^k\}$為 k 階線性遞迴數列 $\{a_n^k\}$中的餘數數列且 $c_k=1$，若s為週期長度$L_k(m)$中 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1個}$ 出現的個數，則

(i) $r_{i+j+k-2}\equiv\llbracket r_jr_{i-1}\rrbracket\pmod m$ ，其中$\llbracket r_jr_{i-1}\rrbracket$ 為模m後的餘數且 $1\le i\le s-1, j\in N$。 (ii)k**為奇數:** $L_k(m)=s\cdot\ell_k(m)$**,其中**$s=1,k$。

(iii)k**為偶數:** $L_k(m)=s\cdot\ell_k(m)$**,其中**$s=f_1,f_2,\cdots,f_t$ 。

【預備定理 2】 $\llbracket r_\alpha^{kt}\rrbracket\equiv\begin{cases}1 & ,其中k為奇數\\ \pm1 & ,其中k為偶數\end{cases}\pmod m$

(ii)k**為奇數**

(a)當 $r_\alpha=mq+1$時，$r_\alpha\equiv1\pmod m$，所以$s=1$ 。

(b)當$r_\alpha=mq+v,v\in\{v\,|\,(m-v)^k\equiv-1\pmod m\}$時，

$\llbracket r_\alpha^k\rrbracket\equiv1\pmod m\Rightarrow s=k$

(iii)k**為偶數** $k=6$: $f_1=1,f_2=2,f_3=3,f_4=4,f_5=6,f_6=12$

(a)當$r_\alpha=mq+1$ 或$r_\alpha=mq-(m-1)$ 時，$r_\alpha\equiv1\pmod m$，所以 $s=1$。

(b)當$r_\alpha=mq-1$ 時，$\llbracket r_\alpha^2\rrbracket\equiv1\pmod m\Rightarrow s=2$

(c)當$(m-v)^6\equiv1\pmod m$時，

$\llbracket r_\alpha^3\rrbracket\equiv1\pmod m,\llbracket r_\alpha^6\rrbracket\equiv1\pmod m\Rightarrow s=3,6$

(d)當$(m-v)^6\equiv-1\pmod m$時，

$\llbracket r_\alpha^4\rrbracket\equiv1\pmod m,\llbracket r_\alpha^{12}\rrbracket\equiv1\pmod m\Rightarrow s=4,12$

區分週期列循環的條件

(2) $c_k \neq 1, \gcd(c_k, m) = 1$:每個週期循環列皆由 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割。

【定理 8】(二階餘數數列的週期循環性質)

設 $\{r_n^2\}$ 為二階線性遞迴數列 $\{a_n^2\}$ 中的餘數數列且 $c_2 \neq 1, \gcd(c_2, m) = 1$,若 s 為週期長度 $L_2(m)$ 中 $\mathbf{0}$ 出現的個數,則 (i) $r_{i+j} \equiv [\![c_2 r_j r_{i-1}]\!] \pmod m$,其中 $[\![c_2 r_j r_{i-1}]\!]$ 為模 m 後的餘數且 $1 \le i \le s-1, j \in N$。(ii) $L_2(m) = s \cdot \ell_2(m)$,其中 $s \le m-1$。

由預備定理 1 知 $[\![r_\alpha^t]\!]^2 - 0^2 \equiv (-1)^{t-2} \pmod m \Rightarrow [\![r_\alpha^{2t}]\!] \equiv (-1)^{t-2} c_2^{t-1} \pmod m$

$\{a_n^2\}: a_n = 2a_{n-1} + 7a_{n-2}$ 為例

m	2	3	4	5	11
s	1	2	1	4	5

【定理 9】(k 階餘數數列的週期循環性質)

設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階線性遞迴數列 $\{a_n^k\}$ 中的餘數數列且 $c_k \neq 1, \gcd(c_k, m) = 1$,若 s 為週期長度 $L_k(m)$ 中 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 出現的個數, 則 (i) $r_{i+j} \equiv [\![c_k r_j r_{i-1}]\!] \pmod m$,其中 $[\![c_k r_j r_{i-1}]\!]$ 為模 m 後的餘數。(ii) $L_k(m) = s \cdot \ell_k(m)$,其中 $s \le m-1$。

(3) $c_k \neq 1, \gcd(c_k, m) \neq 1$: 分成四種情形

【定理 10】在某項後均為 0

均勻分割 每個週期循環列皆由 $\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 或 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 均勻分割。

【定理 11】

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}} \Rightarrow$ $c_k \neq 1, \gcd(c_k', m') = 1$

$\gcd(c_1, \cdots, c_k) \neq 1, \gcd(c_k', m') \neq 1$

【定理 12~13】(k 階餘數數列的週期循環性質)

設 $\{r_n^k\}$ 為 k 階線性遞迴數列 $\{a_n^k\}$ 中的餘數數列且 $c_k \neq 1, \gcd(c_k, m) \neq 1$,若 s 為週期長度 $L_k(m)$ 中 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 出現的個數,則(i)

$$k=2: r_{i+j+1} \equiv [\![r_{j+1}x_1 + c_2 r_j r_{i-1}]\!] \pmod m$$

$$k=3: r_{i+j+1} \equiv [\![r_{j+1}x_2 + c_2 r_j x_1 + c_3(r_{j-1}x_1 + r_j r_{i-1})]\!] \pmod m$$

$$k: r_{i+j+k-2} \equiv \left[\!\!\left[r_{j+1}x_{k-1} + \sum_{\ell_1=2}^{k-1}\left[c_{\ell_1} \sum_{\ell_2=2}^{\ell_1} r_{j-\ell_1+\ell_2} x_{k-\ell_2} \right] + c_k \sum_{\ell=1}^{k-2} r_{j-\ell} x_\ell + c_k r_j r_{i-1} \right]\!\!\right] \pmod m$$

(ii) $L_k(m) = s \cdot \ell_k(m)$,其中 $s \le m-1$

c_1	c_2	c_3	m	s	$\ell_k(m)$	$L_k(m)$
1	2	2	10	2	6	12
1	2	2	12	1	26	26
2	3	3	15	2	62	124
3	2	6	14	3	16	48

區分週期循環的條件

$c_k = 1$

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割

$c_k \neq 1$

$\gcd(c_k, m) = 1$

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割

$\gcd(c_k, m) \neq 1$

$\gcd(c_1, \cdots, c_k) = 1$

$x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 均勻分割

在某項後均為 0 或不為 0 的常數

$\gcd(c_1, \cdots, c_k) \neq 1$

$\gcd(c_1, \cdots, c_k) = d \ (d > 1)$

$c_k' = c_k / d, m' = m / d$

$\gcd(c_k', m') = 1$

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 均勻分割

在某項後均為 0

$\gcd(c_k', m') \neq 1$

$\underbrace{0,0,\cdots,0}_{k-1\text{個}}$ 或 $x_1, x_2, \cdots, x_{k-1}$ 均勻分割

在某項後均為 0 或不為 0 的常數

計算循環週期

【定理 14~15】(k 階餘數數列的週期循環性質)

設 β 為 $\{a_n^k\}$ 中模 m 後的餘數數列的週期,若 $m = p_1^{t_1} \times p_2^{t_2} \times \cdots \times p_u^{t_u}$,且 $\beta_1, \cdots, \beta_u$ 分別為 $\{a_n^k\}$ 中模 $p_1^{t_1}, \cdots, p_u^{t_u}$ 後的餘數數列的週期,則 $L_k(m) = lcm(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_u)$。

m	2	4		8	16	2^{t_1}
$L_2(m) \le p_1^{t_1-1}\beta_1'$	**3**	$6 = 2^{2-1} \cdot 3$		$6 < 2^{3-1} \cdot 3$	$6 < 2^{4-1} \cdot 3$	$L_2(m) \le 2^{t_1-1} \cdot 3$
m	**3**	**5**	**7**	**12**	**10**	**28**
$L_2(m) = lcm(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_u)$	**1**	**24**	**24**	$6 = lcm(6,1)$	$24 = lcm(3,24)$	$24 = lcm(6,24)$

3.探討數列的因倍數性質

【定理 16】費氏數列: $a_{m+n} = a_m a_{n+1} + a_{m-1} a_n$ 且 $a_n \mid a_{mn}$

【定理 17】二階線性遞迴數列

(i) 當 $c_1 = 1, c_2 \in N$ 時,則 $a_{m+n} = a_m a_{n+1} + c_2 a_{m-1} a_n$ 且 $a_n \mid a_{mn}$。(ii) 當 $c_1 \in N, c_2 = 1$ 時,則 $a_{m+n} = a_m a_{n+1} + a_{m-1} a_n$ 且 $a_n \mid a_{mn}$。(iii) 當 $c_1 \in N \setminus \{1\}, c_2 \in N$ 時,則 $a_{m+n} = a_m a_{n+1} + c_2 a_{m-1} a_n$ 且 $a_n \mid a_{mn}$。

【定理 18】k 階線性遞迴數列

(i) 當 $c_k = 1$ 或 $c_k \neq 1, \gcd(c_k', m') = 1$ 時,則 $m \mid a_{n\ell_k(m)-i}$ 且 $m \mid a_{nL_k(m)-i}$,其中 $i = 0, 1, \cdots, k-2$。
(ii)其餘 $m \nmid a_{n\ell_k(m)-i}$ 且 $m \nmid a_{nL_k(m)-i}$ 或 $[\![a_{m+j}]\!] \equiv$ 常數,其中 $j = 0, 1, \cdots, n-m$。

三、結論與未來展望

1.結論

本作品將費氏數列中的**餘數數列性質**推廣到一般高階線性遞迴數列的情形,得到其數列中模 m 後的餘數數列皆會有週期。我們探討出**區分週期循環的條件**,進一步用週期循環列均勻分割方式得到均勻分割循環規律,精確計算其週期長度。 最後由週期性質推導**高階線性遞迴數列的因倍數性質** 。

2.未來展望

(i)探討直接計算其週期長度。 (ii)探討 s 的規律性。 (iii)探討哪些餘數數列在某項後才有週期循環列出現,其中前幾項的規律性。 (iv)論證在某項後均為不為0的常數的性質。
每個定理完備性及證明的嚴謹度,是未來努力突破的。

四、參考資料

[1]吳振奎(1993)。**斐波那契數列**。台北市:九章出版社。
[2]張福春、莊淨惠 (2009)。線性遞迴關係之求解(上)(下) 。**數學傳播**,**33**(4),47-62。
[3] Alfred S. Posamentier and Ingmar Lehmann (2007). ***The fabulous Fibonacci numbers.*** Amherst, N.Y. : Prometheus Books.
[4] Grimaldi, Ralph P(1998). ***Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction.*** Mass.:Addison-Wesley Longman. P 244–248.