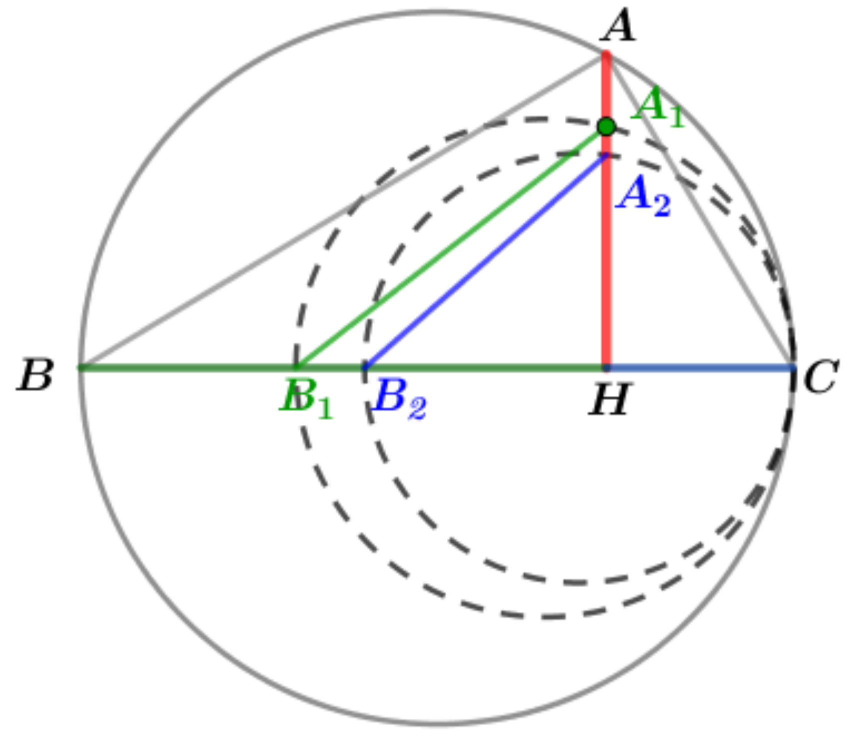


作品名稱：

天「次」良機-

利用Excel及幾何尺規作圖探討m次方根之探討

作者：陳彥岑、周怡辰

指導老師：林鳳美

中學生小論文比賽 - 數學類

中學生1110315梯次 小論文寫作比賽 得獎名單

類別	年級	班級	作者	指導老師	作品標題	名次
數學類	一年級	101	陳彥岑 周怡辰	林鳳美	天「次」良機-利用Excel及幾何尺規作圖探討m次方根之探討	優等

中學生1110315梯次小論文寫作比賽
18件獲獎 4件優等

前言 (Introduction)

研究動機 (Research Motivation)

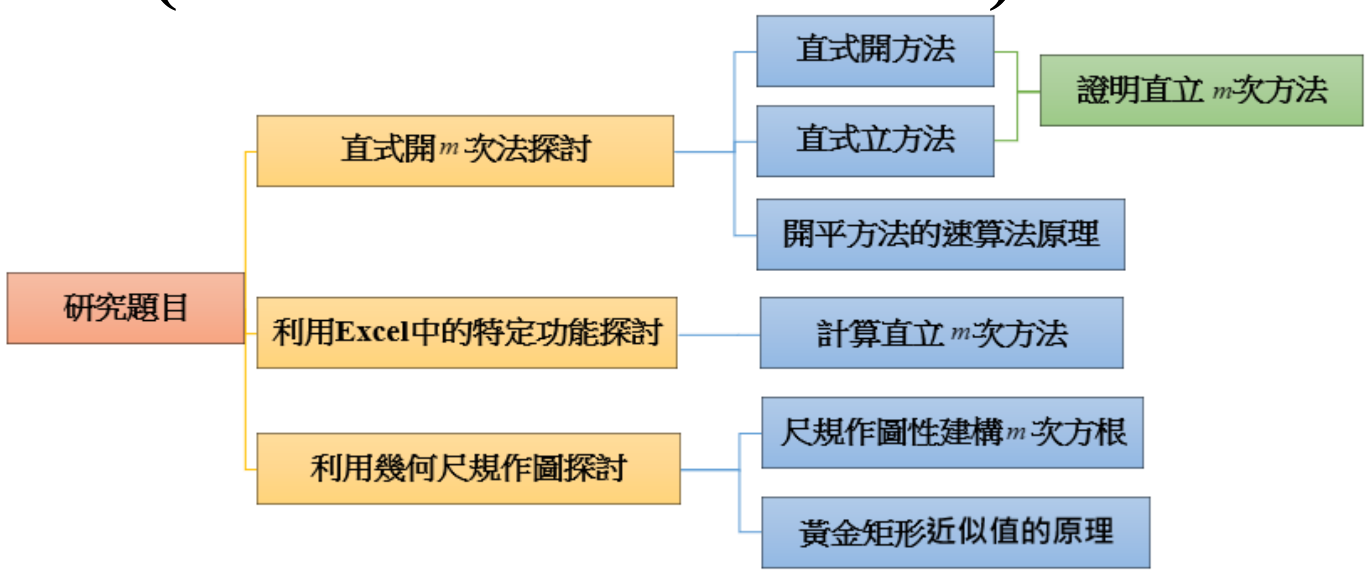
直式開n 的m次方根

- 證明出開平方根速算法
- Excel探討m次方根
- 利用幾何尺規作圖

研究問題 (Research Problem)

1.n 如何開m次方根呢？ 2.如何運用Excel探討m次方根？ 3.如何尺規作圖出$\sqrt[m]{n}$

研究架構 (Research Architecture)



直式開 m 次方法

推廣直式開方法至直式開 m 次方法

$$\sqrt{n} = a_0.a_1a_2a_3\cdots \qquad \sqrt[m]{n} = a_0.a_1a_2a_3\cdots$$

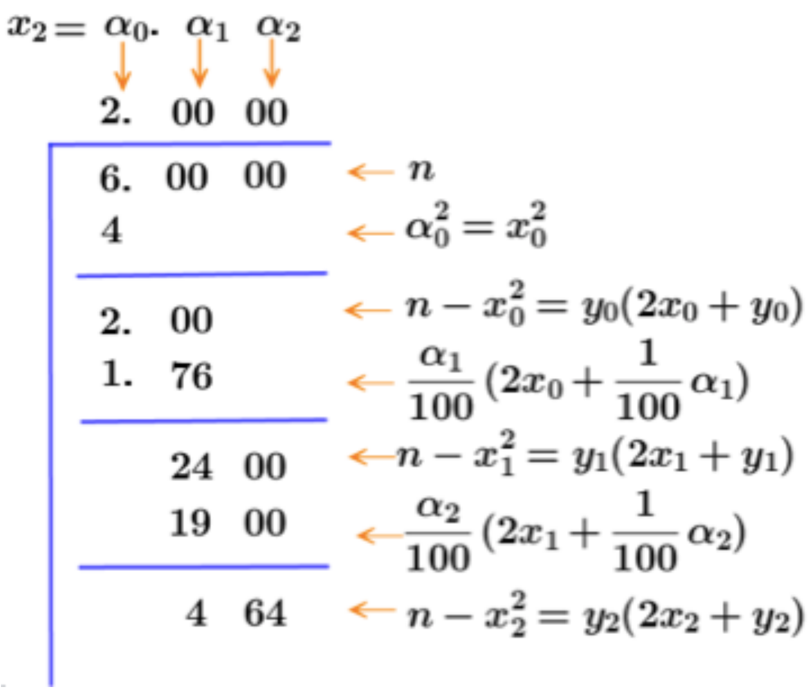


圖 1：直式開平方法

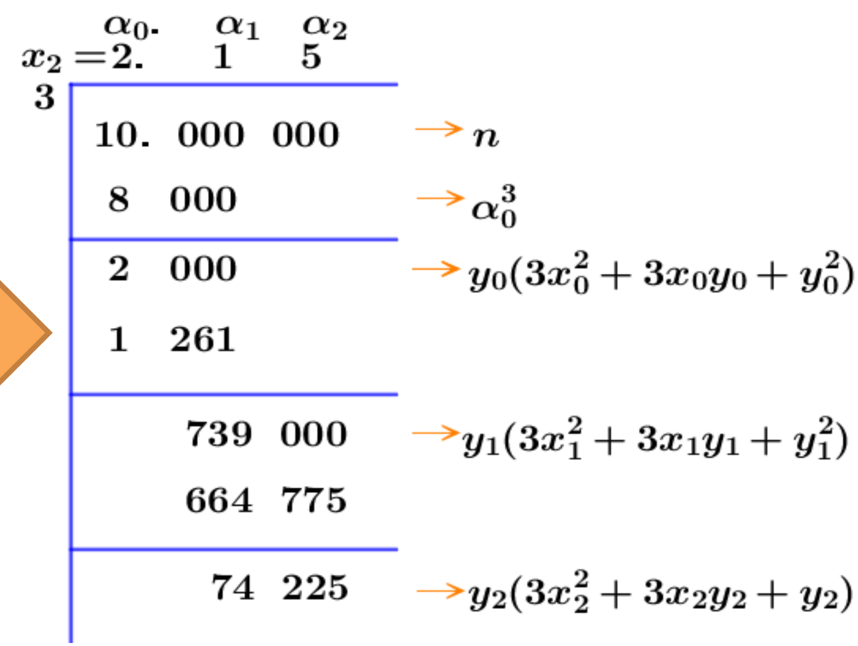


圖 2：直式開立方法

開平方法的速算法原理

設n為正整數，若 $n=\alpha^2+\beta$，其中α為正整數且 $0\le\beta<1$，則

$$\sqrt{n}=\alpha+\cfrac{\beta}{2\alpha+\cfrac{\beta}{2\alpha+\cfrac{\beta}{2\alpha+\cfrac{\beta}{2\alpha+\cdots}}}}\approx\alpha+\frac{\beta}{2\alpha}$$

例如：

$\sqrt{n}\approx\alpha+\frac{\beta}{2\alpha}$	$\sqrt{n}$ 的近似值	$\sqrt{n}\approx\alpha+\frac{\beta}{2\alpha}$	$\sqrt{n}$ 的近似值
$\sqrt{312}\approx17+\frac{23}{2\cdot17}\approx17.676$	$\sqrt{312}\approx17.664$	$\sqrt{347}\approx18+\frac{23}{2\cdot18}\approx18.639$	$\sqrt{347}\approx18.628$
$\sqrt{325}\approx18+\frac{1}{2\cdot18}\approx18.003$	$\sqrt{325}\approx18.028$	$\sqrt{354}\approx18+\frac{30}{2\cdot18}\approx18.833$	$\sqrt{354}\approx18.815$
$\sqrt{334}\approx18+\frac{10}{2\cdot18}\approx18.278$	$\sqrt{334}\approx18.276$	$\sqrt{363}\approx19+\frac{2}{2\cdot19}\approx19.053$	$\sqrt{363}\approx19.053$

利用Excel探討根號n的近似值

SQRT函數

利用Excel中的特定功能SQRT函數求n的近似值，

其語法是：SQRT（number）

POWER函數

利用Excel中的特定功能

POWER函數求 $\sqrt[m]{n}$ 的近似值，

其語法是：POWER（number,power）

B2 =SQRT(A2)

	A	B
1	輸入值	SQRT執行後
2	100	10
3	144	12
4	137	11.7046999

圖 3：SQRT函數

B3 =POWER(B1,B2)

	A	B	C
1	底數	2	6
2	指數	0.25	0.5
3	函數值	1.18920712	2.44948974

B3 =POWER(B1,B2)

	A	B	C
1	底數	7	20
2	指數	0.125	13
3	函數值	1.27537311	8.192E+16

圖 4：POWER函數

幾何尺規作圖$\sqrt{n}$

尺規作圖$\sqrt{n}$

方法1：在圖 5當中

以原點為圓心半徑為$\sqrt{n+1}$畫弧交 x軸於$(n+1,0)$

方法2：在圖 6當中

重複堆疊直角三角形繪出畢氏螺旋，以找到$\sqrt{n}$

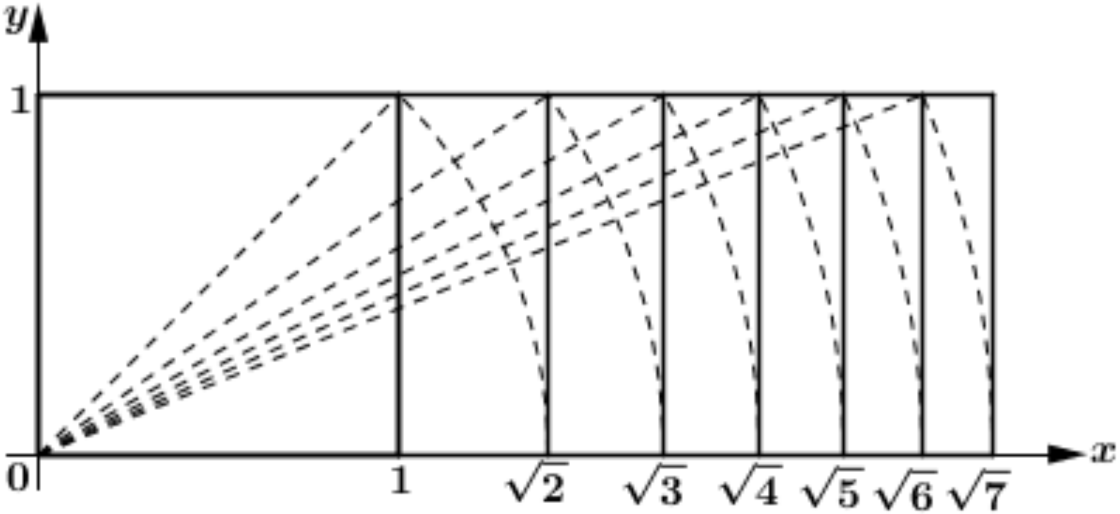


圖 5：尺規作圖$\sqrt{n}$

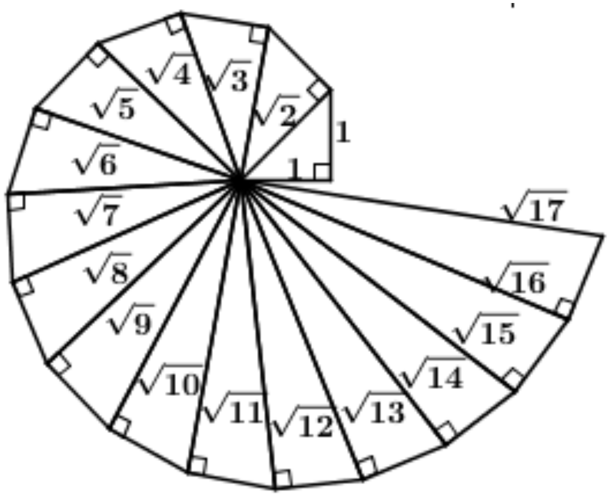
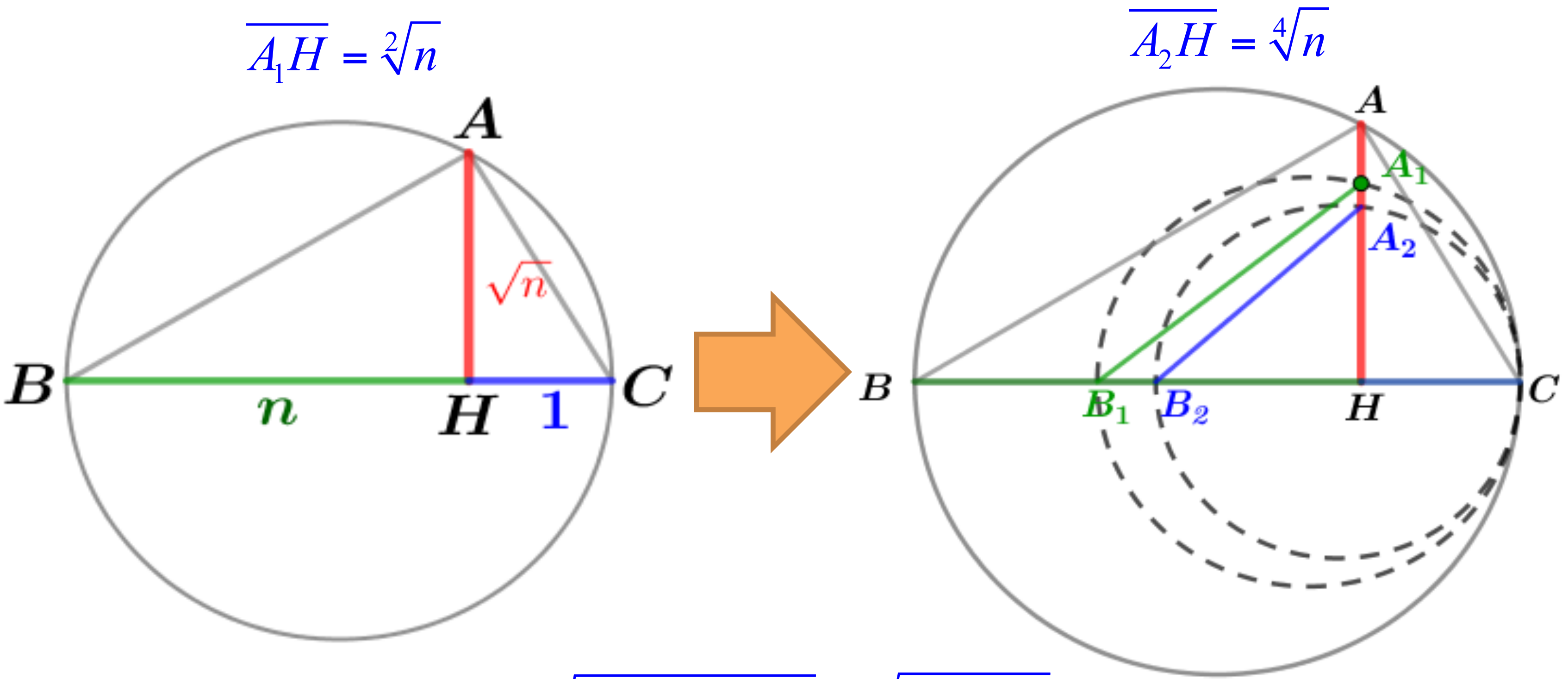


圖 6：畢式螺旋

建構 2^m 次方根

參考圖7可由**直角三角形母子性質**繪出 n 的 2^m 次方根



$$\overline{A_{m-1}H} = \sqrt{\overline{B_{m-1}H} \times \overline{HC}} = \sqrt{\sqrt[2^{m-1}]{n} \times 1} = \sqrt[2^m]{n}$$

圖 7：建構 $\sqrt[2^m]{n}$ 次方根

幾何作圖 $a+b\sqrt{n}$

$a+b\sqrt{n}$的近似值

- 參考圖 6，從證明 $\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 可類推 $a+b\sqrt{n}$ 的近似值
- 參考圖 7，若 ABF_1E_1為黃金矩形，

  則 $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x}{1}=\phi$ 解得 $x=\dfrac{t+\sqrt{t^2+4}}{2}$

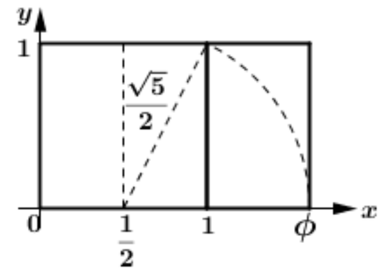


圖 8：黃金矩形

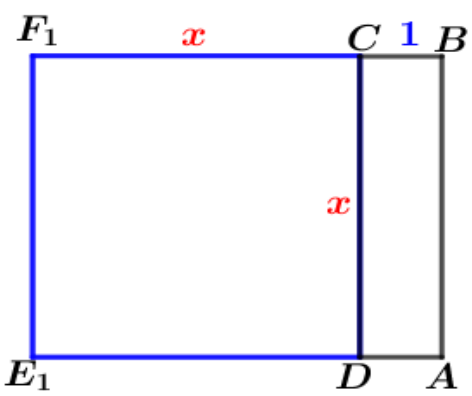


圖 9：$\phi=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}=x$

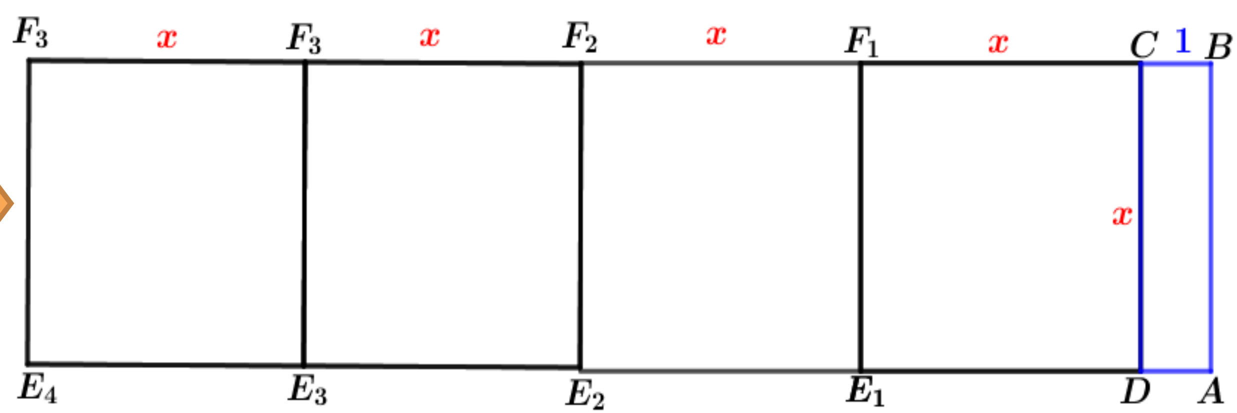


圖10：$a+b\sqrt{n}$ 的近似值

結論 (Conclusions)

- 利用直式開方法及直式立方法進而推廣至直式開m次方
- 開平方法的速算法當在n值越大時，$\sqrt{n}$越精確
- 由直角三角形的母子性質可知n的2^m次方根必為規矩數
- 從建構黃金矩形類推出$a+b\sqrt{n}$的近似值
- ✓ 藉由探討直式找到開m次方的公式，期許找到更加簡潔的方法
- ✓ 進一步探討$\sqrt[m]{n}$的幾何性質

參考文獻資料 (References)

- 丘宏義譯 (Mario Livio 著)。**黃金比例**。遠流出版公司
- 李政憲、陳柏昇、馮鈞羿 (2017)。從費氏數列到黃金矩形。**科學教育月刊，405**（12）。
- 孫文先編譯(1989)。**神祕有趣的數學**。九章出版社。
- 華羅庚 (1957)。**數論導引**。科學出版社。

心得感言

10103 周怡辰

課本和講義大多會提到開平方法的運算方式，但是卻很少人會提到關於開立方法的簡易運算，也不會有人想知道開立方法的原理，透過這次的研究，推論出開m次方根的方法。

在進行研究的過程當中，常常會遇到挫折，例如：套用了相同的公式，但是結果卻沒有規律。遇到挫折的同時，我們也在學習新的工具—Excel，這確實是以前沒碰過的工具，看似簡單，要控制卻還是有難度，明明是照著書上的函數寫，結果卻不如預期，試過很多遍，經過不斷修正，才將答案完美呈現。

在老師一步步的帶領下，我們運用以往的直式開平方法延伸出立方甚至m次方根、運用作圖來達成n的m次方根、運用Excel完成簡易函數...等。透過以往的文獻發展出新的理論，以及延伸出更多未知的問題。

心得感言

10109 陳彥岑

這篇小論文在探討n的m次方根，主要利用直式開方法、Excel函數及幾何性質來探討其近似值。透過文獻探討，從平方、立方到推廣m次方根了解了許多性質。

過程中我們遇到一些大大小小的問題，例如：在文獻探討的過程當中，剛開始我們對於許多符號和性質都合不太熟悉，透過不斷累積經驗，慢慢漸入佳境。或是，我們從文獻探討中得知開平方法的速算式，但始終卻證明不出算式。從解決這些困境中，也許我們會花很多時間和心力，但更重要的事我們從這些問題中獲得的知識與經驗。

經過這次的小論文研究，離開了原先在學校學習數學的思維，也從文獻探討中學到許多新知識，包括根號的性質、Excel特殊函數及幾何性質等等。這次研究我們也在原有的文獻的定理建立出許多未知的領域。