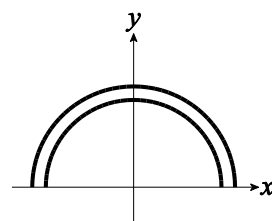


1. 坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2 + y^2 = 3$ 的外部與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R 。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 $C_1: x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$ 、 $C_2: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$ 上移動。開始時掃描棒黑端在點 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，白端在 C_2 的點 B 。接著黑、白兩端各沿著 C_1 、 C_2 逆時針移動，直至白端碰到 C_2 的點 $B'(-2, 0)$ 便停止掃描。



- (1) 試問點 B 的坐標為下列哪一選項？（單選題）
 ① $(0, 2)$ ② $(1, \sqrt{3})$ ③ $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ④ $(\sqrt{3}, 1)$ ⑤ $(2, 0)$ 。
- (2) 令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A', B' 。試在題目圖中以塗色標示掃描棒掃過的區域 R ；並於求解區內求 $\cos \angle OA'B'$ 及點 A' 的極坐標。（非選擇題）
- (3)（承上題）令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求 Ω 與 R 的面積。（非選擇題）

【111 學測 A】

ANS: (1) ④ (2) $0, [\sqrt{3}, 150^\circ]$ (3) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$

2. 試問有多少個實數 x 滿足 $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = \sin x + \sin \frac{\pi}{6}$ 且 $0 \leq x < 2\pi$ ？

- (1) 1 個 (2) 2 個 (3) 3 個 (4) 4 個 (5) 5 個（含）以上 【113 學測 A】

ANS: (2)

3. 已知 $\sin \theta = -\frac{2}{3}$ 且 $\cos \theta < 0$ ，請問下列哪些選項是正確的？（多選題）

- (1) $\tan \theta > 0$ (2) $\tan 2\theta > 10$ (3) $\sin^2 \theta > \cos^2 \theta$ (4) $\cos 2\theta > 0$ (5) $\cos \frac{\theta}{2} > 0$ 【學測】

ANS: (1)(4)

4. 在同一平面上，相距 7 公里的 A, B 兩砲台， A 在 B 的正東方。某次演習時， A 向西偏北 θ 方向發射砲彈， B 則向東偏北 θ 方向發射砲彈，其中 θ 為銳角，觀測回報兩砲彈皆命中 9 公里外的同一目標 P 。接著 A 改向西偏北 $\frac{\theta}{2}$ 方向發射砲彈，彈著點為 9 公里外的點 Q 。試問砲台 B 與彈著點 Q 的距離 \overline{BQ} 為何？

- (1) 4 公里 (2) 4.5 公里 (3) 5 公里 (4) 5.5 公里 (5) 6 公里 【113 學測 A】

ANS: (3)

5. 令 $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ，試選出正確的選項。

- (1) 鉛直線 $x = \frac{\pi}{6}$ 為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸
(2) 若鉛直線 $x = a$ 和 $x = b$ 均為 $y = f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a) = f(b)$
(3) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x) = \sqrt{3}$
(4) 在區間 $[0, 2\pi)$ 中滿足 $f(x) = \frac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π
(5) $y = f(x)$ 的圖形可由 $y = 4 \sin^2 \frac{x}{2}$ 的圖形經適當（左右、上下）平移得到 【112 學測 A】

ANS: (1)(5)

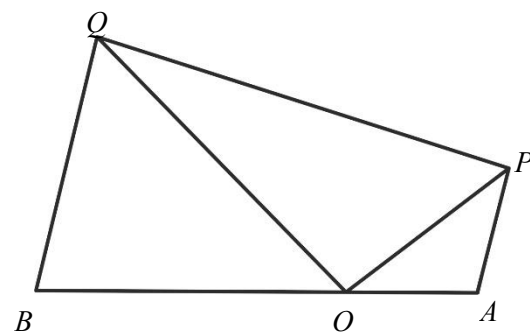
6. 坐標平面上 O 為原點，給定 $A(1,0)$ 、 $B(-2,0)$ 兩點。另有兩點 P 、 Q 在上半平面，且滿足 $\overline{AP} = \overline{OA}$ 、 $\overline{BQ} = \overline{OB}$ 、 $\angle POQ$ 為直角，如圖所示。令 $\angle AOP = \theta$ 。根據上述，試回答下列問題。

(1) 線段 \overline{OP} 長為下列哪一選項？（單選題）

- ① $\sin \theta$ ② $\cos \theta$ ③ $2\sin \theta$ ④ $2\cos \theta$ ⑤ $\cos 2\theta$

(2) 若 $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，試求點 Q 的坐標，並說明 $\vec{BQ} = 2\vec{AP}$ 。（非選擇題）

(3) （承 19 題）試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 $PABQ$ 的面積。（非選擇題分）



ANS: (1)④ (2) $Q\left(-\frac{36}{25}, \frac{48}{25}\right)$ (3) A 到直線 BQ 的距離為 $\frac{72}{25}$ ，四邊形 $PABQ$ 的面積為 $\frac{108}{25}$

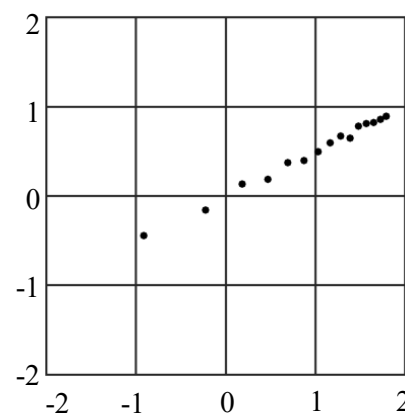
7. 令坐標平面上滿足 $y = \log x$ 的點 (x, y) 所成圖形為 Γ ，試問滿足下列哪些關係式的 (x, y) 所成圖形與 Γ 完全相同？

- (1) $y + \frac{1}{2} = \log(5x)$ (2) $2y = \log(x^2)$ (3) $3y = \log(x^3)$ (4) $x = 10^y$ (5) $x^3 = 10^{(y^3)}$

【113 學測 A】

ANS: (3)(4)

8. 某生推導出兩物理量 s, t 應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據 (s_k, t_k) ， $k=1, \dots, 15$ 。老師建議他將其中的 t_k 先取對數，在坐標平面上標出對應的點 $(s_k, \log t_k)$ ， $k=1, \dots, 15$ ，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得 s, t 的關係式最可能為下列哪一選項？



- (1) $s = 2t$ (2) $s = 3t$ (3) $t = 10^s$ (4) $t^2 = 10^s$
 (5) $t^3 = 10^s$ 【112 學測 A】

ANS(4)

9. 在坐標平面上， Γ 是邊長為 4 的正方形，其中心位在點 $(1, 1)$ ，且各邊與坐標軸平行。已知函數 $y = a \times 2^x$ 的圖形與 Γ 相交，其中 a 為實數，則 a 的最大可能範圍為_____。

【110 學測】

ANS: $-2 \leq a \leq 6$

10. 已知 $a > 1$ ，且知當 $0 \leq x \leq 2$ 時， $y = a^{x^2 - 3x + 3}$ 的最小值為 $\frac{27}{8}$ ，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。（化為最簡分數）

110 試辦考試數 A

ANS: $\frac{81}{16}$

11. 設 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 是首項為 3 且公比為 $3\sqrt{3}$ 的等比數列。試選出滿足不等式

$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \log_3 a_n > 18$ 的項數 n 之可能選項。

(1) 23 (2) 24 (3) 25 (4) 26 (5) 27。

【112 學測 A】

ANS(3)(5)

12. 設等差數列 $\langle a_n \rangle$ 之首項 a_1 與公差 d 皆為正數，且 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 依序也成等差數列。試選出數列 $\log a_1, \log a_3, \log a_6$ 的公差。

(1) $\log d$ (2) $\log \frac{2}{3}$ (3) $\log \frac{3}{2}$ (4) $\log 2d$ (5) $\log 3d$ 。 【111 學測 A】

ANS: (3)

13. 考慮二元一次方程組 $\begin{cases} ax+6y=6 \\ x+by=1 \end{cases}$ ，其係數 a, b 之值分別由投擲一顆公正骰子與一枚均勻硬幣來決定。令 a 值為骰子出現之點數；若硬幣出現正面時 b 值為 1，若硬幣出現反面時 b 值為 2。試選出正確的選項。

(1) 擲出 $a=b$ 的機率為 $\frac{1}{3}$

(2) 此方程組無解的機率為 $\frac{1}{12}$

(3) 此方程組有唯一解的機率為 $\frac{5}{6}$

(4) 硬幣出現反面且此方程組有解的機率為 $\frac{1}{2}$

(5) 在硬幣出現反面且此方程組有解的條件下， x 值為正的機率為 $\frac{2}{5}$ 【113 學測 A】

ANS: (2)(3)

14. 坐標平面上，已知向量 \vec{v} 在向量 $(2, -3)$ 方向的正射影長比原長少 1，而在向量 $(3, 2)$ 方向的正射影長比原長少 2。若 \vec{v} 與兩向量 $(2, -3), (3, 2)$ 的夾角皆為銳角，則 \vec{v} 在向量 $(4, 7)$ 方向的正射影長為 _____。(化為最簡根式)

【113 學測 A】

ANS: $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

15. 設 O 、 A 、 B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 \overrightarrow{OA} 垂直 \overrightarrow{OB} 。若 C 、 D 兩點在直線 AB 上，

滿足 $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ 、 $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ ，且 \overrightarrow{OC} 垂直 \overrightarrow{OD} ，則 $\frac{\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{OA}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化為最簡分數) 【112 學測 A】

ANS: $\frac{3}{4}$

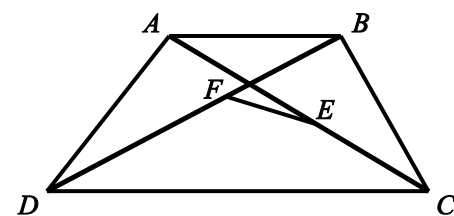
16. 設 D 為 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的一點，已知 $\angle ABC = 75^\circ$ 、 $\angle ACB = 45^\circ$ 、 $\angle ADB = 60^\circ$ 。

若 $\overrightarrow{AD} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ ，則 $s = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $t = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(化成最簡分數) 【107 學測 A】

ANS: $\frac{1}{3}$ ， $\frac{2}{3}$

17. 考慮一梯形 $ABCD$ ，其中 \overline{AB} 與 \overline{DC} 平行。已知點 E 、 F 分別在對角線 \overline{AC} 、 \overline{BD} 上，且 $\overline{AB} = \frac{2}{5}\overline{DC}$ 、 $\overline{AE} = \frac{3}{2}\overline{EC}$ 、 $\overline{BF} = \frac{2}{3}\overline{FD}$ ，如圖所示。

若將向量 \overrightarrow{FE} 表示成 $\alpha\overrightarrow{AC} + \beta\overrightarrow{AD}$ ，則實數 $\alpha = \underline{\hspace{1cm}}$ 、 $\beta = \underline{\hspace{1cm}}$ 。（化成最簡分數）



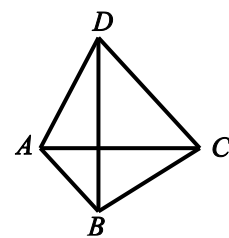
【110 指甲】

ANS: $\alpha = \frac{9}{25}$ ， $\beta = -\frac{4}{25}$

18. 如圖（此為示意圖）， A ， B ， C ， D 為平面上的四個點。已知 $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ， \overrightarrow{AC} 、 \overrightarrow{BD} 兩向量等長且互相垂直，則 $\tan \angle BAD = \underline{\hspace{1cm}}$ 。

【108 學測】

ANS: -3



19. 設 \vec{a} 與 \vec{b} 都是平面上不為零的向量。若 $2\vec{a} + \vec{b}$ 與 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 所張成的三角形面積為 6，則 $3\vec{a} + \vec{b}$

與 $\vec{a} + 3\vec{b}$ 所張成的三角形面積為下列哪一個選項？（單選題）

- (1)8 (2)9 (3)12 (4)13.5 (5)16 【110 學測】

ANS: (5)

20. 已知 P 為 $\triangle ABC$ 內一點，且 $\vec{AP} = a\vec{AB} + b\vec{AC}$ ，其中 a, b 為相異實數。設 Q, R 在同一平面上，且 $\vec{AQ} = b\vec{AB} + a\vec{AC}$ ， $\vec{AR} = a\vec{AB} + (b - 0.05)\vec{AC}$ 。試選出正確的選項。

(1) Q, R 也都在 $\triangle ABC$ 內部

(2) $|\vec{AP}| = |\vec{AQ}|$

(3) $\triangle ABP$ 面積 = $\triangle ACQ$ 面積

(4) $\triangle BCP$ 面積 = $\triangle BCQ$ 面積

(5) $\triangle ABP$ 面積 > $\triangle ABR$ 面積

【112 學測 A】

ANS(3)(4)

21. 若實數 a, b, c, d 使得聯立方程式 $\begin{cases} ax+8y=c \\ x-4y=3 \end{cases}$ 有解，且聯立方程式 $\begin{cases} -3x+by=d \\ x-4y=3 \end{cases}$ 無解，則下列哪些選項一定正確？（多選題）

- (1) $a \neq -2$ (2) $c = -6$ (3) $b = 12$ (4) $d \neq -9$ (5) 聯立方程式 $\begin{cases} ax+8y=c \\ -3x+by=d \end{cases}$ 無解

【學測】

ANS: (3)(4)

22. 坐標平面上有一個平行四邊形 $ABCD$ ，其中點 A 的坐標為 $(2,1)$ ，點 B 的坐標為 $(8,2)$ ，點 C 在第一象限且知其 x 坐標為 12。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 38 平方單位，則點 D 的坐標為_____。 【學測】

AMS: (6, 8)