臺北市立成淵高級中學 115 學年度正式教師甄選
—高中數學科筆試

第壹部分：填充題（每題 6 分，共 72 分）

※每格$\boxed{\text{完全答對才給分}}$；答案若為分數，請以最簡分數表示；若有根號，請以最簡根式表示。

1. 滿足$\sqrt{x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}}+\sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}=x+\frac{5}{6}$的所有實數$x$為__$0,1$__。

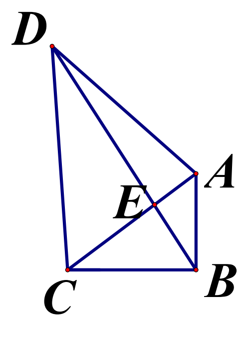
2. 若$\begin{cases} xy=64 \\ 2\log_x y+3\log_y x=7 \end{cases}$，其中$x,y$為實數，則數對$(x,y)$為__$(16,4)$, $(2\sqrt{2},16\sqrt{2})$__。

3. 設正立方體骰子A的六面點數分別為$1,2,3,4,5,6$，正立方體骰子B的六面點數分別為$2,3,5,7,11,13$，且兩個骰子各面出現的機率皆為$\frac{1}{6}$。某人投擲骰子A、B各一次，若A骰子的點數等於B骰子的點數，則可獲得2026元；若A骰子的點數大於B骰子的點數，則可獲得115元；若A骰子的點數小於B骰子的點數，則可獲得0元。設獲得金額的期望值為$\frac{q}{p}$元，其中p,q為兩互質的正整數，則數對(p,q)為__$(18,3499)$__。

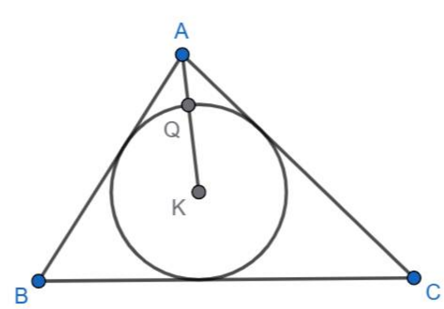
4. 已知函數$f(x)=1+\frac{3}{2}x+\sqrt{4-x^2}$，其中$-2\le x\le 2$。設函數$f(x)$的最大值為$M$，最小值為$m$，試求數對$(M,m)$為__$(1+\sqrt{13},-2)$__。

5. 已知x為正實數，則$(x+\frac{1}{x})(x+\frac{2}{x})(x+\frac{4}{x})$的最小值為__$18\sqrt{2}$__。

6. 如圖，平面上有一個四邊形$ABCD$，設兩對角線$\overline{AC}$與$\overline{BD}$交於點E，已知$\overline{AB}=3,\overline{BC}=4,\overline{AC}=5,\overline{AD}=6,\overline{CD}=7$，則線段$\overline{AE}$的長度為__$\frac{48}{25}+(-\frac{3}{25})\sqrt{6}$__。



7. 如圖，$\triangle ABC$中，$\overline{AB}=5$，$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，$\triangle ABC$的內心為K點，Q點為$\overline{AK}$和$\triangle ABC$內切圓的交點，且$\overrightarrow{AQ}=t\,\overrightarrow{AK}$，則實數$t$的值為__$\frac{5-\sqrt{10}}{5}$__。



8. 在坐標平面上有一個橢圓的方程式為$5x^2-6xy+5y^2=72$，則此橢圓的正焦弦長為___3___。

9. 空間中有不共平面的四點O,A,B,C，令$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{a}$、$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{b}$、$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{c}$，$D,E$為空間中的兩點滿足$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{c}$，$P$在$\overline{DE}$上且$\overline{DP}:\overline{PE}=2:3$。已知過$A,C,D$三點的平面與$\overrightarrow{OP}$交於點$Q$，則$\triangle OAQ$與$\triangle APQ$的面積比為___$5:2$___。

10. 已知方程式$x^3-2x^2+3x-4=0$之三根為α,β,γ，且以$(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2),(\beta^2+\beta\gamma+\gamma^2),(\gamma^2+\gamma\alpha+\alpha^2)$為三根之方程式為$x^3+ax^2+bx+c=0$，則數組$(a,b,c)$為___$(1,7,23)$___。

11. 在複數平面上，P_k表示$(\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5})^k$所代表的點（$k=0,1,2,3,4$），令以$P_1,P_3,P_4$為頂點的三角形其重心坐標為$z$，則$|z|$的值為___$\frac{\sqrt{5}-1}{6}$___。

12. 設$f(x)$為三次實係數多項式，滿足x^3項的係數為 1，$f(x)=0$有三相異實根，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=-1$，函數值$f(3)<0$。已知$y=f(x)$的函數圖形會與$x$軸圍出兩個封閉區域，而且這兩個封閉區域的面積和為$\frac{253}{2}$，則$f(3)$的值為___$-30$___。

第貳部分：計算證明題（共 28 分）

※請將解題過程書寫於答案卷方框內。若只有答案，**沒有詳述原因或推導過程會斟酌扣分**。

1. 某社團有六位同學，最高的同學為 178 公分，最矮的同學為 158 公分，另外還有兩位同學的身高分別為 163 公分和 173 公分。考慮這六位同學身高的數值，已知這六個數值為完全相異的正整數，且算術平均數等於中位數，請回答下列各小題。
   (1) 試證：這六個數值之總和是 3 的倍數。（4 分）
   (2) 試求這六個數值之算術平均數的所有可能值。（10 分）

【簡答】：(1) 略　(2) $167,167.5,168,168.5,169$

2. 數列$\langle a_n\rangle$滿足$\begin{cases} a_1=2 \\ a_{n+1}={a_n}^2+a_n+1\ ,n\in\mathbb{N} \end{cases}$，請回答下列各小題。
   (1) 證明：對於所有的正整數n，均滿足a_n-2是5的倍數。（4 分）
   (2) 證明：對於所有的正整數n，均滿足${a_n}^2+1$是5^n的倍數。（10 分）

【簡答】：(1) 略　(2) 略